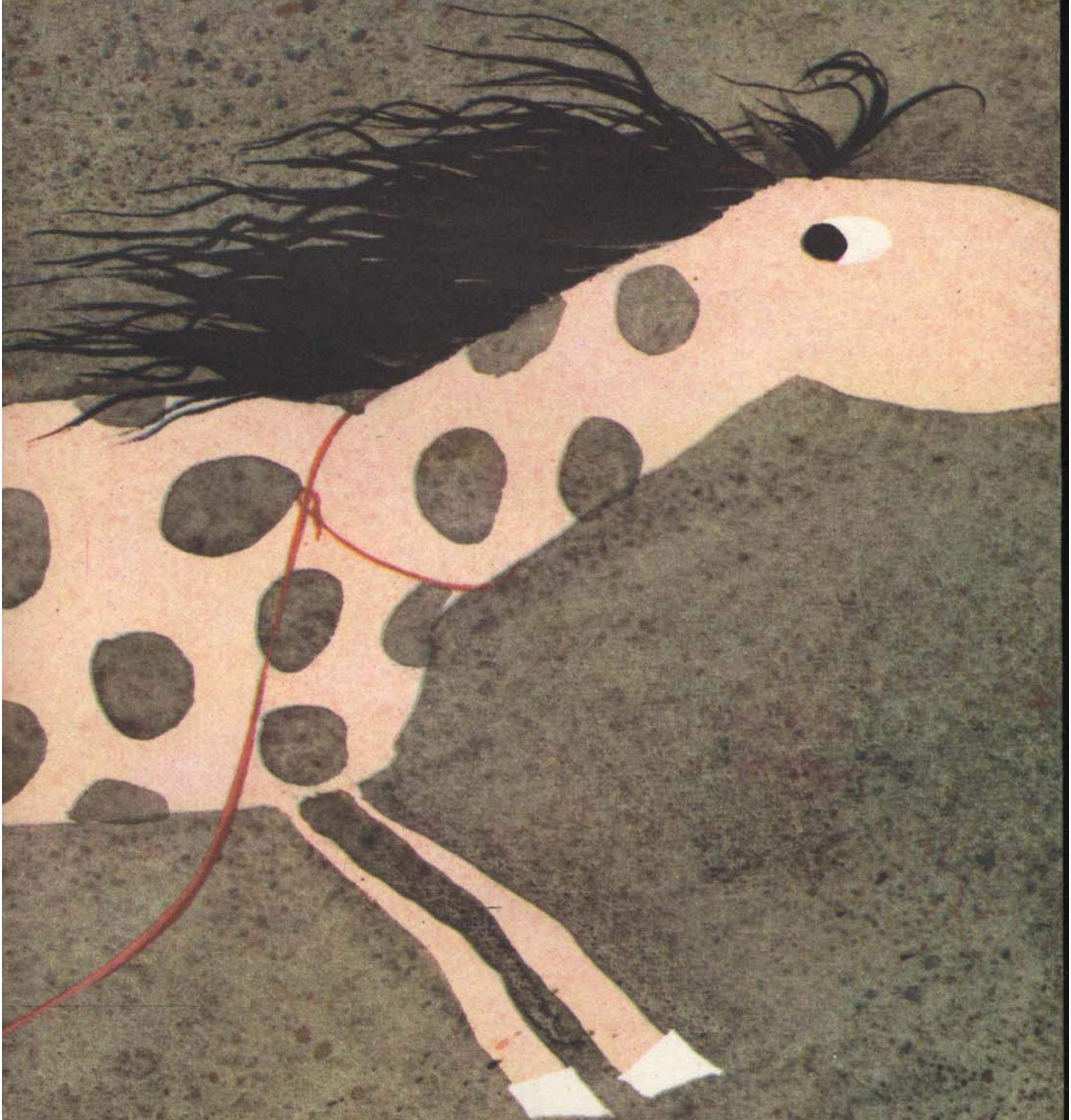
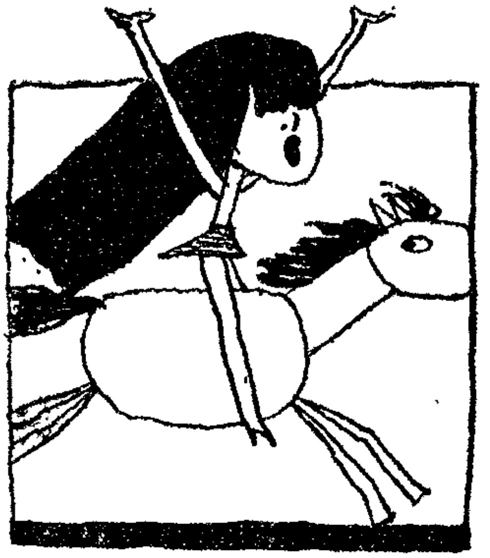
И. Н. Сергеев С. Н. Олехник С. Б. Гашков



примени математику

И. Н. Сергеев
С. Н. Олехник
С. Б. Гашков

ПРИМЕНИ МАТЕМАТИКУ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1989

ББК 22.1
С32
УДК 51(023)

Рецензент
доктор физико-математических наук *В. Г. Демин*

Сергеев И. Н., Олехник С. Н., Гашков С. Б.
С32 Примени математику.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.— 240 с.
ISBN 5-02-013946-7

На примере решения большого числа конкретных задач в основном практического содержания показывается, как использовать математические идеи и методы для нахождения выхода из разного рода затруднительных положений, которые могут возникнуть в повседневной жизни. Рассматриваются вопросы построения и измерения ограниченными средствами, поиска оптимального решения в той или иной ситуации, способы быстрого счета, задачи на разрезание, переливание, взвешивание и т. п.

Для школьников и всех любителей математики.

$С \frac{1602000000-105}{053(02)-89}$ 36-89 **ББК 22.1**

ISBN 5-02-013946-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

При написании этой книги мы ставили своей целью научить читателя искусству применения математических идей и методов к решению практических и теоретических задач, к нахождению выходов из разного рода затруднительных положений, возникающих в повседневной жизни, и даже к тем вопросам, в которых использование математики поначалу кажется просто невозможным.

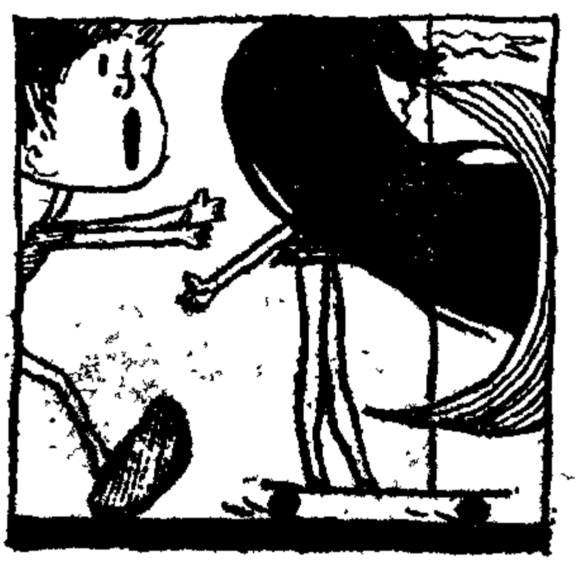
Книга представляет собой сборник задач, сгруппированных по темам в отдельные параграфы. В связи с этим принята двойная нумерация задач. Например, задача 14.6 содержится в § 14 и идет там шестой по счету. В начале каждого параграфа приводятся необходимые сведения, соглашения и понятия, используемые в задачах. Решения задач помещены в конце соответствующих параграфов. В пределах одного параграфа задачи расположены в основном по возрастанию трудности. Рекомендуем решать их по порядку и сравнивать полученные решения с приведенными в книге.

Некоторые задачи этого сборника заимствованы из различных занимательных математических книг и журналов. При этом отбирались наиболее интересные и поучительные на наш взгляд задачи, имеющие практическое значение. Многие задачи переработаны нами или придуманы специально для этой книги. Мы старались приводить наиболее простые из известных нам и легко осуществимые на практике решения, доступные по возможности более широкому кругу читателей. Однако вполне допускаем, что какие-то из приведенных решений окажутся не самыми лучшими.

В книге нет громоздких формул, сложных выкладок или заумных рассуждений. Для решения задач не требуются ни толстые справочники, ни сверхточные приборы, ни быстродействующие компьютеры — нужны лишь карандаш, листок бумаги и, главное, ... смекалка. Надеемся, что задачи доставят читателю немалое удовольствие. А если ему удастся впоследствии на деле применить приобретенные знания, то он, возможно, испытает радость и от неожиданного практического их эффекта. Итак, за работу!

Авторы

§ 1. ТРИ ПИШЕМ, ДВА В УМЕ



Многим из вас когда-нибудь приходилось и, скорее всего, еще не раз придется заниматься различными вычислениями. Вы, наверняка, заметили, что считать «вручную» на бумаге или тем более в уме — дело кропотливое и к тому же весьма ненадежное. Ведь любая ошибка (а при большом объеме вычислений с возможностью сделать ошибку нельзя не считаться) ведет к неверному ответу, проверка которого означает пересмотр всех сделанных выкладок. Если же в результате этого пересмотра ответ не совпадает с первоначальным, то возникает вопрос, какому из двух ответов больше доверять. Стало быть, нужно набраться терпения и пересчитать все заново, а возможно, и не один раз.

Между тем бороться с указанными неприятностями можно. Один из способов вам хорошо известен — это использование калькуляторов. К сожалению, калькулятор не всегда имеется под рукой. Поэтому полезно уметь немножко разнообразить скучное занятие, связанное с вычислениями, используя различные приемы как для упрощения выкладок, так и для их проверки. В настоящем параграфе вы найдете подборку задач, в которых как раз и разрабатываются такие приемы.

1.1. Сумма цифр

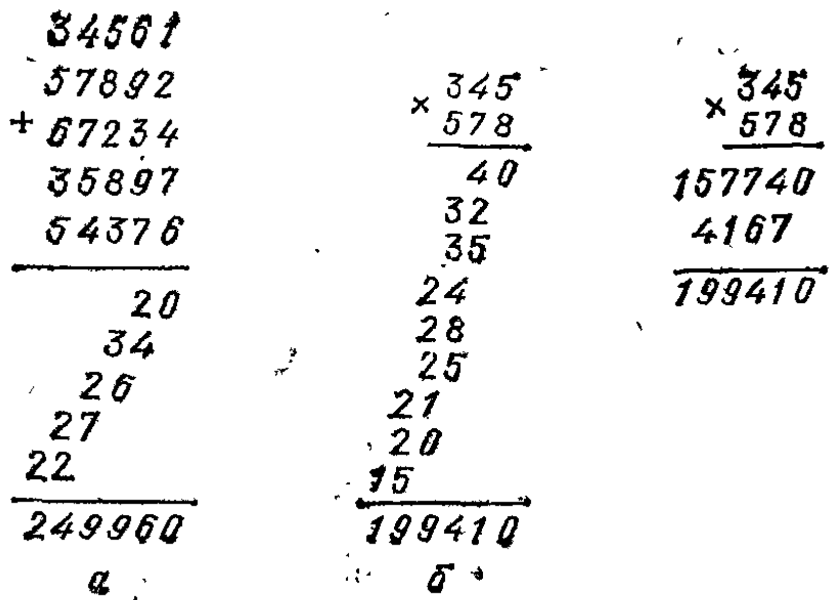
Требуется сложить много однозначных чисел. Как облегчить эту работу и быстрее получить правильный ответ?

1.2. Сложение большого количества двузначных чисел

Проделайте следующий эксперимент: откройте книгу на произвольной странице дальше 10-й и запишите число, составленное из двух последних цифр номера страницы. Открывая книгу много раз (скажем, 20) и беря числа попеременно то с правой, то с левой стороны книги, вы получите большой набор двузначных чисел. Попробуйте быстро найти их сумму.

Какие приемы позволяют упростить эту работу?

1.3. Необычные записи



Рис, 1

На рис. 1 приведены любопытные способы записи операций сложения и умножения многозначных чисел. Разберитесь в этих способах.

1.4. Таблица умножения на пальцах

Если вы хорошо знаете таблицу умножения чисел, меньших 5, но почему-то неуверенно себя чувствуете при умножении однозначных чисел, бо́льших 5, то вы можете контролировать себя с помощью пальцев следующим образом. Пусть надо перемножить числа 6 и 7. Загнем на одной руке столько пальцев, на сколько первый сомножитель превышает 5 (в нашем случае $6-5=1$ палец), а на другой руке столько пальцев, на сколько второй сомножитель превышает 5 (в нашем случае $7-5=2$ пальца). Если сложить количества загнутых пальцев и перемножить количества незагнутых пальцев, то получится соответственно число десятков $1+2=3$ и число единиц $4\times3=12$, а сумма $30+$ $+12=42$ как раз и будет равна произведению 6×7.

Дайте обоснование предложенному способу умножения.

1.5. Умножение на 9 с помощью пальцев

Этот способ настолько прост, что его может освоить любой ребенок, знакомый лишь с элементарным счетом. Пусть нужно умножить 6 на 9. Положив обе руки на стол, приподнимем шестой палец, считая слева направо. Тогда количество пальцев слева от поднятого укажет цифру десятков (в нашем случае 5), а количество пальцев справа от поднятого укажет цифру единиц (равную 4), т. е. искомое произведение будет равно 54.

Объясните, почему предложенный способ дает правильный ответ при умножении любого однозначного числа на 9.

1.6. Вычитание вместо умножения

Умножение некоторого числа на 9 можно свести к вычитанию двух чисел. Подумайте, каких. Предложите аналогичный способ умножения чисел на 99, на 999, на числа, близкие к числам 10, 100, 1000 и т. д.

1.7. Быстрое деление

Деление числа 63 475 на 999 было произведено следующим образом:

$$63\,475 = 63 \times 1000 + 475 = 63 \times 999 + 63 + 475 =$$
$$= 63 \times 999 + 538,$$

откуда частное равно 63, а остаток 538.

Используя аналогичные преобразования, разделите число 63 475 с остатком на 99, на 98 и на 102.

1.8. Умножение и деление на 5

Трудно не согласиться с тем, что разделить произвольное число на 2 в уме легче, чем умножить его на 5. Нельзя ли воспользоваться этим обстоятельством, чтобы облегчить умножение чисел на 5? Что вы можете предложить вместо деления на 5?

1.9. Умножение и деление на степень пятерки

Аналогично умножению или делению на 5 (см. задачу 1.8) можно сравнительно легко в уме умножать или делить числа на 25 и на 125. Как именно?

1.10. С помощью обыкновенных дробей

Предложите способы быстрого умножения на 2,5, на 1,25, на 1,5 и на 0,75 (а также на 15 и на 75), использующие представление десятичных дробей в виде обыкновенных.

1.11. Способ удвоения

При умножении чисел на степень двойки иногда используется способ, суть которого можно продемонстрировать на следующем примере:

$$139\times32=278\times16=556\times8=1112\times4=2224\times2=4448.$$

Как видоизменить этот способ для умножения на число, близкое к степени двойки, скажем на 14 или на 35?

1.12. Деление на степень двойки

Предложите способ деления чисел на степень двойки, подобный способу удвоения (см. задачу 1.11).

1.13. Умножение чисел второго десятка

Для того чтобы перемножить два двузначных числа, меньших 20, достаточно сложить цифры единиц этих чисел и, увеличив сумму в 10 раз, прибавить к ней 100 и произведение тех же цифр.

Дайте обоснование предложенному способу.

1.14. Умножение чисел десятого десятка

Для того чтобы перемножить два двузначных числа, близких к 100, достаточно вычесть из одного числа дополнение второго до 100 и, увеличив разность в 100 раз, прибавить к ней произведение дополнений исходных чисел до 100. Например, верны выкладки

$$93\times98=(93-2)100+2\times7=9114.$$

Дайте обоснование предложенному способу.

1.15. Умножение чисел, близких к 1000

При перемножении чисел 987 и 996 были проделаны вычисления:

$$987\times996=(987-4)1000+4\times13=983\ 052.$$

Убедитесь, что в результате найден верный ответ, и объясните способ его получения (сравните с задачей 1.14).

1.16. Устное умножение

Докажите, что для перемножения двух чисел, у которых цифры единиц в сумме дают 10, а цифры других разрядов совпадают, достаточно число, получающееся в результате отбрасывания цифры единиц, умножить на следующее за ним натуральное число и, увеличив произведение в 100 раз, прибавить к нему произведение цифр единиц исходных чисел. Например, верны выкладки

$$62\times68=6\times7\times100+2\times8=4216.$$

1.17. Квадрат числа, оканчивающегося на 5

Сформулируйте общее правило, с помощью которого возведены в квадрат следующие числа:

$$85^2=8\times9\times100+25=7225,$$
$$115^2=11\times12\times100+25=13\,225.$$

Откуда вытекает справедливость этого правила?

1.18. Если числа оканчиваются на 5

Докажите, что для перемножения двух чисел, оканчивающихся на 5, достаточно отбросить у каждого числа последнюю цифру, а затем, увеличив большее из полученных чисел на 1, умножить его на меньшее из них и прибавить к результату полуразность тех же чисел, наконец, увеличить ответ в 100 раз и прибавить 25. Например, пользуясь указанным способом, находим произведения

$$75\times95=\left((9+1)\,7+\frac{9-7}{2}\right)100+25=7125,$$
$$75\times85=\left((8+1)\,7+\frac{8-7}{2}\right)100+25=6375.$$

1.19. С помощью квадратов

Если вы хорошо помните или умеете быстро восстанавливать в памяти квадраты натуральных чисел, то вы сможете и быстро перемножить, скажем, числа 32 и 36 следующим способом:

$$32\times36=34^2-2^2=1156-4=1152.$$

Обоснуйте верность приведенных выкладок и подумайте, к каким парам чисел удобнее применять указанный способ перемножения чисел.

1.20. Квадраты близких чисел

Пусть вы помните квадрат какого-то числа и хотите по нему быстро восстановить квадрат числа, отличающегося от исходного на 1 или 2. Как это можно сделать, не производя операции возведения в квадрат?

Если вы помните только квадраты чисел, кратных 5, то без особого напряжения сможете восстанавливать квадраты остальных целых чисел. Как именно?

1.21. Следующий куб

Пусть вам известен куб некоторого числа. Как с его помощью проще найти куб следующего числа?

1.22. Квадрат числа, близкого к «круглому»

Быстрому возведению в квадрат может способствовать умение перемножать в уме любые числа с некоторыми числами специального вида, например

$$192^2 = 200 \times 184 + 8^2 = 36\,864,$$
$$412^2 = 400 \times 424 + 12^2 = 169\,744.$$

На каком приеме основаны вычисления квадратов в данных примерах?

1.23. Следующие 25 квадратов

Если вы знаете квадраты всех чисел от 1 до 25, то вам нет никакой необходимости заучивать квадраты следующих 25 чисел. Для возведения в квадрат любого числа, заключенного между 25 и 50, достаточно отнять от него 25 и, увеличив результат в 100 раз, прибавить к нему квадрат дополнения этого числа до 50. Например, справедливы равенства

$$37^2 = (37-25)100 + (50-37)^2 = 1200 + 169 = 1369.$$

Дайте обоснование предложенному способу.

1.24. Квадраты чисел, больших 50

Как изменить описанную в задаче 1.23 процедуру возведения в квадрат, чтобы она годилась и для двузначных чисел, больших 50?

1.25. Квадраты чисел, близких к 500

При возведении в квадрат числа 492 были проделаны вычисления

$$492^2 = (492-250)1000 + (500-492)^2 = 242\,064.$$

Убедитесь, что в результате найден верный ответ, и сформулируйте общее правило возведения в квадрат чисел, близких к 500 (сравните с задачами 1.23 и 1.24).

Решения

1.1. Имеет смысл сосчитать, сколько раз среди слагаемых встречаются в отдельчасти числа 1, 2, 3, . . ., 9. Если количества этих чисел скажутся соответственно равными n_1, n_2, $n_3, \ldots, n_9$, то искомая сумма будет равна $1\times n_1+2\times n_2+3\times n_3+\ldots+9\times n_9$ и подсчет этой суммы можно будет произвести более экономно, а значит, с меньшей вероятностью ошибки.

1.2. Если чисел достаточно много, то среди них с большой вероятностью найдутся пары или тройки чисел, дающие в сумме целое число десятков. Заменим такие группы чисел их суммами, а затем среди новых слагаемых выделим аналогично группы чисел, дающие в сумме целое число сотен. Действуя таким образом, мы сильно упростим работу по сложению исходных чисел. Например, складывая числа 17, 96, 72, 29, 93, 32, 87, 68, 84, 37, 13, 92, 55, 61, 45, 34, 73, 29, 20, 64, получаем

$$(17+93)+(96+84)+(72+68)+(29+61)+(87+13)+$$
$$+(37+73)+(55+45)+20+(32+34+64)+(92+29)=$$
$$=110+180+140+90+100+110+100+20+130+120+1=$$
$$=(110+90)+(180+20)+(100+100)+$$
$$+(140+110+130+120)+1=$$
$$=200+200+200+500+1=1101.$$

Попробуйте подсчитать сумму исходных чисел в том порядке, в каком они были записаны вначале, и вы убедитесь, насколько это трудоемкое и нудное занятие.

1.3. Приведенная на рис. 1, *а* запись есть не что иное, как запись поразрядного сложения многозначных чисел, отличающаяся от обычной тем, что в ней не требуется запоминать никаких цифр при переносе из одного разряда в другой. Так, при сложении цифр единиц всех слагаемых получается 20, что и записано в первой строке под чертой. При сложении цифр десятков всех слагаемых получается 34, что и записано в следующей строке (разумеется, не прямо под предыдущим числом, а со сдвигом на один разряд влево), и т. д.

На рис. 1, *б* приведена запись умножения чисел 345 и 578, в которой действия произведены в необычном порядке. Сначала перемножены цифры единиц и в первой строке записан результат 40. Затем перемножены последовательно такие пары цифр, которые дают число десятков произведения,— это пары 4, 8 и 5, 7 — и записаны результаты 32 и 35. Далее перемножены пары цифр, дающие число сотен произведения, и т. д.

Наиболее труден для расшифровки, видимо, рис. 1, *в*, который отличается от предыдущего только тем, что в нем сложены и записаны в соответствующих местах числа единиц, десятков, сотен и т. д., полученные при умножении чисел 345 и 578. В первой строке под чертой записаны справа налево двузначное число единиц 40, затем двузначное число сотен $24+28+25=77$ (заметьте, что именно сотен, а не десятков — в противном случае произошло бы неизбежное «наложение» одних чисел на другие, что повлекло бы за собой дополнительные трудности) и, наконец, двузначное число десятков тысяч 15. В следующей строке записаны аналогично двузначное число десятков $32+35=67$ и двузначное число тысяч $21+20=41$.

1.4. Пусть на левой руке загнуто a пальцев, а на правой — b пальцев. Тогда сами сомножители равны $5+a$ и $5+b$ соответственно, а их произведение равно

$$(5+a)(5+b)=25+5a+5b+ab=$$
$$=10a+10b+(25-5a-5b+ab)=10(a+b)+(5-a)(5-b),$$

где $5-a$ и $5-b$ — как раз количества незагнутых пальцев на левой и правой руке соответственно. Таким образом, предложенный способ умножения на пальцах дает верный результат.

1.5. При умножении однозначного числа a на 9 предложенным способом мы получаем, что слева от a-го (поднятого) пальца находится $a-1$ пальцев, а справа $10-a$ пальцев, т. е. искомое произведение равно

$$10(a-1)+(10-a)=10a-10+10-a=9a,$$

что и требовалось объяснить.

1.6. Так как $9a=10a-a$, то для умножения числа a на 9 достаточно от увеличенного в 10 раз числа a отнять само число a. Например, при $a=437$ имеем

$$437\times 9=4370-437=3933.$$

Аналогично вместо умножения числа a на 99 или на 999 можно умножить его на 100 или на 1000 соответственно, а потом отнять само число a, например,

$$437\times 99=43\,700-437=43\,363,$$
$$437\times 999=437\,000-437=436\,563.$$

В общем случае умножения на числа, близкие к степени десятки, поступаем аналогично, например,

$$437\times 997=437(1000-3)=437\,000-1311=435\,689.$$

1.7. Так как

$$63\,475=634\times100+75=634\times99+634+75=$$
$$=634\times99+6\times100+34+75=634\times99+6\times99+6+34+75=$$
$$=640\times99+115=641\times99+16,$$

то частное от деления данного числа на 99 равно 641, а остаток 16. Так как

$$63\,475=634\times98+634\times2+75=$$
$$=634\times98+6\times98\times2+6\times2\times2+34\times2+75=$$
$$=646\times98+24+68+75=647\times98+69,$$

то частное от деления на 98 равно 647, а остаток 69. Так как

$$63\,475=634\times102-634\times2+75=$$
$$=634\times102-6\times102\times2+6\times2\times2-34\times2+75=$$
$$=622\times102+24-68+75=622\times102+31,$$

то частное от деления на 102 равно 622, а остаток 31.

1.8. Вместо умножения числа a на 5 можно, и это действительно проще, разделить его на 2 и умножить на 10, поскольку $5a=\frac{a}{2}\times10$. Аналогично вместо деления числа a на 5 можно, наоборот, умножить его на 2 и разделить на 10, поскольку $\frac{a}{5}=\frac{2a}{10}$. Например, имеем

$$1275\times5=637{,}5\times10=6375,$$
$$1275:5=2550:10=255.$$

1.9. Так как $25=\frac{100}{4}$, то справедливы формулы $25a=\frac{a}{4}\times100$ и $\frac{a}{25}=\frac{4a}{100}$, пользуясь которыми, например, получаем

$$786\times25=78\,600:4=19\,650,$$
$$786:25=4\times7{,}86=31{,}44.$$

Что же касается умножения и деления на 125, то здесь аналогично получаем формулы $125a=\frac{a}{8}\times1000$ и $\frac{a}{125}=\frac{8a}{1000}$, правые части которых также реализуются в уме, например,

$$786\times125=786\,000:8=98\,250,$$
$$786:125=8\times0{,}786=6{,}288.$$

1.10. Учитывая равенства

$$2{,}5=\frac{10}{4},\quad 1{,}25=1+\frac{1}{4}=\frac{10}{8},\quad 1{,}5=1+\frac{1}{2},\quad 0{,}75=1-\frac{1}{4},$$

мы можем умножение произвольного числа на 2,5 заменить делением удесятеренного числа на 4, умножение на 1,25 — прибавлением четверти числа или делением удесятеренного числа на 8, умножением на 1,5 — прибавлением половины числа, умножение на 0,75 — вычитанием четверти числа. Так, справедливы выкладки

$$179\times 2{,}5=1790:4=447{,}5,$$
$$179\times 1{,}25=179+179:4=179+44{,}75=1790:8=223{,}75,$$
$$179\times 1{,}5=179+179:2=179+89{,}5=268{,}5,$$
$$179\times 0{,}75=179-179:4=179-44{,}75=134{,}25.$$

Наконец, умножение на 15 и на 75 можно представить соответственно как умножение на 1,5 и на 0,75 с последующим умножением соответственно на 10 и на 100, например

$$34\times 15=(34+17)\,10=510,$$
$$34\times 75=(34-8{,}5)\,100=2550.$$

1.11. При последовательном умножении числа на возрастающие степени двойки, т. е. при последовательном удвоении, можно фиксировать те числа, сумма или разность которых дает искомое произведение. Так, умножение числа 139 на $14=2^4-2^1$ можно провести следующим образом:

$$139\times 14=139\times 2^4-139\times 2^1=2224-278=1946$$

(здесь, разумеется, использованы выкладки, приведенные в условии задачи). Аналогично умножение на $35=2^5+2^1+2^0$ можно провести так:

$$139\times 35=139\times 2^5+139\times 2^1+139\times 2^0=4448+278+139=$$
$$=4865.$$

1.12. Деление на степень двойки можно провести в такой же последовательности, как умножение, описанное в формулировке задачи 1.11, но, естественно, с заменой операции умножения операцией деления, например,

$$139:32=69{,}5:16=34{,}75:8=17{,}375:4=8{,}6875:2=$$
$$=4{,}34375.$$

1.13. Пусть надо перемножить два числа вида $\overline{1a}$ и $\overline{1b}$. Тогда имеем равенства

$$(10+a)(10+b)=100+10a+10b+ab=10(a+b)+100+ab,$$

которые подтверждают правильность предложенного в условии задачи способа.

1.14. Из равенства

$$(100-a)(100-b)=(100-a)100-100b+ab=$$
$$=100((100-a)-b)+ab,$$

где a и b — дополнения первого и второго сомножителя до 100 соответственно, вытекает правильность предложенного способа.

1.15. Ответ получен из верного равенства

$$(1000-a)(1000-b)=(1000-a)1000-1000b+ab=$$
$$=1000((1000-a)-b)+ab$$

при $a=13$ и $b=4$. Таким образом, для перемножения двух трехзначных чисел, близких к 1000, достаточно вычесть из одного числа дополнение второго до 1000 и, увеличив разность в 1000 раз, прибавить к ней произведение дополнений исходных чисел до 1000.

1.16. Пусть нужно перемножить числа $10a+b$ и $10a+c$, удовлетворяющие условию $b+c=10$. Тогда имеем

$$(10a+b)(10a+c)=100a^2+10ac+10ba+bc=$$
$$=100a^2+10a(b+c)+bc=100a^2+100a+bc=$$
$$=100a(a+1)+bc,$$

что и требовалось доказать.

1.17. Для возведения в квадрат числа, оканчивающегося на 5, достаточно отбросить у него последнюю цифру, а затем перемножить полученное число с числом, большим его на 1, и приписать к результату справа 25. Это правило является следствием равенства, доказанного в решении задачи 1.16, если в нем положить $b=c=5$.

1.18. Пусть перемножаются числа $10a+5$ и $10b+5$. Правильность предложенного способа вытекает из следующих равенств:

$$(10a+5)(10b+5)=100ab+50a+50b+25=$$
$$=100ab+100a-50a+50b+25=$$
$$=100(a(b+1))+\frac{b-a}{2}\times 100+25.$$

1.19. Произведение чисел a и b можно найти по формуле

$$ab=\frac{1}{4}((a+b)^2-(a-b)^2)=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

удобной для применения в случае одновременной четности или одновременной нечетности сомножителей (в противном случае их полусумма и полуразность были бы нецелыми) и в случае, когда эти сомножители близки друг к другу.

1.20. Квадраты двух соседних чисел различаются на сумму этих чисел, поскольку имеют место равенства

$$(a+1)^2-a^2=2a+1=(a+1)+a.$$

Аналогично, если числа различаются на 2, то разность их квадратов

$$(a+2)^2-a^2=4a+4=4(a+1)=2((a+2)+a)$$

равна удвоенной сумме этих чисел. Так как любое целое число отличается от ближайшего числа, кратного 5, не более чем на 2, то, пользуясь указанными здесь соображениями, можно восстановить его квадрат, например,

$$\begin{aligned}
31^2&=30^2+(31+30)=900+61=961,\\
32^2&=30^2+2(32+30)=900+124=1024,\\
33^2&=35^2-2(33+35)=1225-136=1089,\\
34^2&=35^2-(34+35)=1225-69=1156.
\end{aligned}$$

1.21. Кубы двух соседних чисел a и $a+1$ различаются на число

$$(a+1)^3-a^3=3a^2+3a+1=3a(a+1)+1,$$

равное утроенному произведению этих чисел, увеличенному на 1. Поэтому, зная куб, скажем, числа 30, мы быстро находим куб следующего числа:

$$31^3=30^3+3\times30\times31+1=27\,000+2790+1=29\,791.$$

1.22. Вычисление квадратов в разобранных примерах основано на формуле

$$a^2=(a+b)(a-b)+b^2,$$

в которой удачный подбор числа b сильно облегчает выкладки: во-первых, один из сомножителей должен оказаться «круглым» числом (желательно, чтобы ненулевой его цифрой была только первая), во-вторых, само число b должно легко возводиться в квадрат, т. е. должно быть небольшим. Эти условия реализуются как раз на числах a, близких к «круглым».

1.23. Пусть надо найти квадрат числа a, заключенного между 25 и 50. Тогда, пользуясь формулой из решения задачи 1.22, получаем

$$a^2=(a+(50-a))(a-(50-a))+(50-a)^2=50(2a-50)+\\
+(50-a)^2=(a-25)100+(50-a)^2,$$

откуда следует справедливость предложенного способа.

1.24. Приведенные в решении задачи 1.23 выкладки справедливы для любого числа a, поскольку они не используют оценок $25 \leqslant a \leqslant 50$. Для описания же процедуры возведения в квадрат двузначного числа a, большего 50, имеет смысл в соответствующем описании из условия задачи 1.23 «дополнение» числа a до 50 заменить дополнением 50 до числа a, а вычитание 25 из числа a — прибавлением 25 к уже найденному дополнению a—50. Действительно, с учетом формулы из решения задачи 1.23 имеем

$$a^2=(a-25)100+(50-a)^2=((a-50)+25)100+(a-50)^2.$$

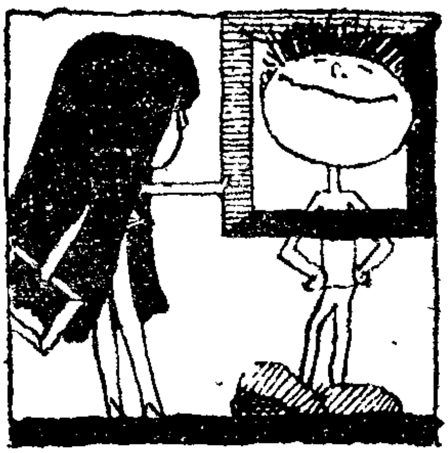
Например, при $a=63$ получаем

$$63^2=(13+25)100+13^2=3969.$$

1.25. Для возведения в квадрат числа, близкого к 500, достаточно отнять от него 250 и, увеличив результат в 1000 раз, прибавить к нему квадрат разности между исходным числом и 500. Действительно, по аналогии с решением задачи 1.23 имеем

$$a^2=(a+(500-a))(a-(500-a))+(500-a)^2=$$
$$=500(2a-500)+(500-a)^2=(a-250)1000+(500-a)^2,$$

а при $a=492$ получаем разобранный в условии пример.



§ 2. НЕ ПРОИЗВОДЯ ДЕЛЕНИЯ

Вопрос о том, делится ли данное число n нацело на другое число m, часто возникает в самых разных практических задачах. Один из способов выяснить это состоит в непосредственном делении числа n на число m, однако такой способ далеко не самый легкий. Желание иметь какие-либо критерии, позволяющие устанавливать факт делимости, не прибегая к операции деления, приводит нас к задаче о нахождении наиболее простых признаков делимости.

Некоторые признаки делимости (на 2, на 3, на 5, на 9) хорошо известны. Целью настоящего параграфа является создание более или менее целостной картины, выработка единого взгляда на систему методов, дающих различные признаки делимости. Разумеется, свойства чисел настолько богаты и разнообразны, что их вряд ли можно уложить в одну простую схему, дающую все признаки делимости. Мы постарались отобрать лишь такие свойства, из которых получаются наиболее эффективные, на наш взгляд, результаты.

Для решения приведенных ниже задач могут понадобиться некоторые сведения о целых числах. Напомним, что деление числа n на число m с остатком означает нахождение частного q и остатка r, для которых выполнены условия

$$n=qm+r, \quad 0\leqslant r<m.$$

Если $r=0$, то говорят, что число n делится на m или кратно m. Мы будем разрешать деление не только положительных чисел, но и любых целых чисел вообще — при этом число q, возможно, будет отрицательным или нулем. Будем допускать также и деление с недостатком $—r$, т. е. представление числа в виде

$$n=qm-r, \quad 0\leqslant r<m.$$

Полезно знать следующие несложные факты (если они вам не известны, то попробуйте доказать их самостоятельно):

а) если два числа отличаются друг от друга на число, кратное m, то остатки от деления этих чисел на m совпадают, и наоборот;

б) сумма двух чисел имеет тот же остаток от деления на m, что и сумма остатков от деления этих чисел на m;

в) произведение двух чисел имеет тот же остаток от деления на m, что и произведение остатков от деления этих чисел на m;

г) если произведение двух чисел, одно из которых взаимно просто с числом m, делится на m, то второе из этих чисел делится на m, и наоборот;

д) если число делится на каждое из двух взаимно простых чисел, то оно делится и на их произведение.

Число, десятичная запись которого состоит из k цифр n_1, $n_2, \ldots, n_{k-1}$, n_k, идущих справа налево, будем обозначать так: $\overline{n_k n_{k-1} \ldots n_2 n_1}$. При этом иногда под k-значным числом будем понимать также числа, имеющие на самом деле менее k цифр, не исключая возможности, что некоторые первые цифры числа являются нулями.

Решив предложенные в этом параграфе задачи, вы сможете конструировать свои, новые признаки делимости, а также научитесь использовать свойства делимости для контроля за правильностью арифметических действий.

2.1. Делимость на 5

Сформулируйте и докажите признак делимости на 5. Как найти остаток от деления числа на 5?

2.2. Делимость на 25

Докажите, что данное число делится на 25 в том и только в том случае, если на 25 делится число, полученное из данного отбрасыванием всех его цифр, кроме двух последних. Укажите, какие в этом случае могут быть две последние цифры числа.

2.3. Степени пятерки

Сформулируйте и докажите признак делимости на 5^k при $k=1, 2, 3, \ldots$

2.4. Степени двойки

Сформулируйте и докажите признак делимости на 2 и вообще на 2^k при $k=1, 2, 3, \ldots$

2.5. Упрощение для 4

Согласно общему признаку делимости на 2^k, чтобы узнать, делится ли данное число на 4, достаточно проверить, делится ли на 4 число, полученное из данного отбрасыванием всех его цифр, кроме двух последних.

Как можно упростить проверку делимости двузначного числа на 4?

2.6. Упрощение для 8

Согласно общему признаку делимости на 2^k, чтобы узнать, делится ли данное число на 8, достаточно проверить, делится ли на 8 число, полученное из данного отбрасыванием всех его цифр, кроме трех последних.

Как можно упростить проверку делимости трехзначного числа на 8?

2.7. По сумме цифр

Докажите, что любое число при делении как на 3, так и на 9 дает тот же остаток, что и сумма его цифр.

2.8. Упрощение для 3

Согласно утверждению задачи 2.7, данное число делится на 3 в том и только в том случае, если на 3 делится сумма его цифр.

Как можно упростить проверку делимости суммы цифр числа на 3, не находя самой этой суммы?

2.9. Упрощение для 9

Согласно утверждению задачи 2.7, данное число делится на 9 в том и только в том случае, если на 9 делится сумма его цифр.

Как можно упростить проверку делимости суммы цифр числа на 9, не находя самой этой суммы?

2.10. Только 3 и 9

Докажите, что если признак делимости на число m (большее 1) не зависит от порядка цифр делимого, то само число m может быть равно только 3 или 9.

2.11. Проверка сложения

Вы сложили несколько чисел и хотите проверить правильность своих вычислений. Для этого можно поступить следующим образом: найти остаток от деления на 9 суммы цифр полученного ответа, затем найти остаток от деления на 9 общей суммы цифр всех слагаемых. Если указанные два остатка не совпадут, то в вычислениях имеется ошибка. Дайте объяснение предложенному способу проверки сложения.

Придумайте аналогичный способ проверки вычисления алгебраической суммы, т. е. суммы нескольких целых чисел разных знаков.

2.12. Проверка умножения

Вы перемножили несколько чисел и хотите проверить правильность своих вычислений. Для этого можно поступить следующим образом: найти остаток от деления на 9 суммы цифр полученного ответа, затем перемножить остатки от деления на 9 суммы цифр каждого из сомножителей и найти остаток от деления на 9 этого произведения. Если указанные два остатка не совпадут, то в вычислениях имеется ошибка.

Дайте объяснение предложенному способу проверки умножения. Придумайте аналогичный способ проверки деления (возможно, с остатком).

2.13. Надежна ли проверка?

В задачах 2.11 и 2.12 приведены способы проверки вычислений, которые позволяют усомниться в правильности произведенных выкладок в случае несовпадения некоторых остатков от деления на 9.

Можно ли утверждать, что если указанные остатки совпали, то вычисления не содержат ошибок?

Можно ли это утверждать при условии, что вы ручаетесь за правильность всех цифр полученного в ответе числа, кроме, быть может, одной цифры?

2.14. В магазине

Вы пришли в магазин и хотите купить 8 одинаковых авторучек, несколько карандашей по 4 копейки, линейку за 9 копеек, 2 общие тетради по 18 копеек и 12 тонких тетрадей. Продавец подсчитал общую стоимость товаров и попросил вас уплатить в кассу 5 рублей 27 копеек.

Как, по-вашему, не ошибся ли продавец?

2.15. Разложив на множители

Сформулируйте признаки делимости на 6, 12, 15, 18, 24, 36, 45. Достаточно ли для проверки делимости числа на 24 установить его одновременную делимость на 4 и на 6?

2.16. Признак Паскаля

Для получения признака делимости на m найдем заранее остатки $m_1, m_2, m_3, \ldots$ от деления на m чисел 10^1, 10^2, $10^3, \ldots$, соответственно. Для любого числа $n = \overline{n_k \ldots n_2 n_1 n_0} = n_0 + 10n_1 + 10^2 n_2 + \ldots + 10^k n_k$ определим число

$$f_m(n) = n_0 + m_1 n_1 + m_2 n_2 + \ldots + m_k n_k.$$

Докажите, что числа n и $f_m(n)$ дают одинаковые остатки при делении на m и могут делиться на m только одновременно. Проверьте, что нахождение остатка m_{k+1} при $k = 1, 2, 3, \ldots$ можно осуществить проще, если заметить, что он равен остатку от деления на m числа $10m_k$ (вместо числа 10^{k+1}).

2.17. Частные случаи

Проверьте, что сформулированные выше признаки делимости на 2, 3, 5 и 9 (см. задачи 2.4, 2.8, 2.1 и 2.9) представляют собой частные случаи признака Паскаля.

2.18. Что лучше?

Получите из признака Паскаля признаки делимости на 4 и на 8. Сравните их с предложенными ранее в задачах 2.5 и 2.6.

2.19. Модификация признака Паскаля

Для практического применения признака делимости на m, сформулированного в задаче 2.16, бывает удобнее некоторых из остатков $m_1, m_2, m_3, \ldots$ от деления на m чисел $10^1, 10^2, 10^3, \ldots$ заменить соответствующими недостатками (особенный эффект от такой замены достигается в тех случаях, когда недостатки близки к нулю).

Проверьте, что в результате указанной замены признак Паскаля сохранит силу.

2.20. Остаток от деления на 11

С помощью модификации признака Паскаля (см. задачу 2.19) придумайте способ, как найти остаток от деления данного числа на 11, не производя самого деления.

Докажите, что данное число делится на 11 в том и только в том случае, если сумма его цифр, стоящих на четных местах, совпадает с суммой его цифр, стоящих на нечетных местах, или отличается от нее на число, кратное 11.

2.21. Еще одна проверка вычислений

По аналогии со способами, предложенными в задачах 2.11 и 2.12, придумайте способы проверки сложения и умножения, основанные на признаке делимости на 11 (см. задачу 2.20).

Докажите, что если возможная ошибка затрагивает только одну цифру полученного в ответе числа, то наличие ошибки можно установить с помощью одного лишь признака делимости на 11.

2.22. Делимость на 7

Пользуясь модификацией признака Паскаля (см. задачу 2.19), сформулируйте признак делимости на 7.

2.23. Разбиение цифр на группы

Когда степени десятки дают при делении на m большие остатки и недостатки, эффективность признака Паскаля (см. задачи 2.16 и 2.19) оказывается невелика, поскольку подсчет значения $f_m(n)$ в этом случае столь же трудоемок, что и непосредственное деление числа n на m. В такой ситуации существенную роль может сыграть обнаружение степени десятки, дающей маленький по модулю остаток или недостаток при делении на m, что позволяет разбить все цифры делимого на группы и тем самым действительно облегчить проверку делимости многозначных чисел.

Пользуясь тем, что число 10^3 дает при делении на 37 остаток 1, получите следующий признак делимости на 37: если разбить все цифры числа n на тройки, начиная справа (в последней «тройке» может оказаться менее трех цифр, но тогда ее недостающие цифры будем считать нулями), и сложить эти тройки как трехзначные числа, то полученная сумма будет иметь тот же остаток от деления на 37, что и число n.

Придумайте способ, как упростить проверку делимости трехзначного числа на 37.

2.24. Общий признак для 7, 11, 13

Пользуясь описанной в задаче 2.23 идеей разбиения цифр на группы, предложите признаки делимости на 7, 11, 13, сводящиеся к проверке делимости некоторого трехзначного числа на 7, 11, 13 соответственно.

2.25. Делимость на 19

Докажите, что число $10n+n_0$ делится на $10m-1$ только одновременно с числом $n+n_0m$. С помощью этого утверждения получите признак делимости на 19.

2.26. Делимость на 31

Докажите, что число $10n+n_0$ делится на $10m+1$ только одновременно с числом $n-n_0m$. С помощью этого утверждения получите признак делимости на 31.

2.27. Еще о делимости на 13

Докажите, что число $10n+n_0$ делится на $10m+3$ только одновременно с числом $n+n_0(3m+1)$. С помощью этого утверждения получите признак делимости на 13.

2.28. Делимость на 17

Докажите, что число $10n+n_0$ делится на $10m-3$ только одновременно с числом $n-n_0(3m-1)$. С помощью этого утверждения получите признак делимости на 17.

Решения

2.1. Число делится на 5 в том и только в том случае, если его последняя цифра равна 0 или 5. Действительно, если последняя цифра числа n равна n_0, то само число n имеет вид $10n_1+n_0$. Так как число $10n_1$ делится на 5, то остаток от деления числа n на 5 совпадает с остатком от деления на 5 цифры n_0. Поэтому остаток от деления числа на 5 равен нулю в том и только в том случае, если его последняя цифра делится на 5, т. е. равна 0 или 5.

2.2. Запишем данное число n в виде $100n_1+n_0$, где n_0 — двузначное число, образованное двумя последними цифрами числа n. Так как число $100n_1$ делится на 25, то остаток от деления числа n на 25 равен остатку от деления на 25 числа n_0. Следовательно, число n делится на 25 в том и только в том случае, если остаток от деления числа n_0 на 25 равен 0, т. е. если две последние цифры числа n образуют одну из четырех комбинаций 00, 25, 50 или 75.

2.3. Число n делится на 5^k в том и только в том случае, если на 5^k делится число n_0, полученное из числа n отбрасыванием всех его цифр, кроме k последних. Действительно, запишем число n в виде $10^k n_1+n_0$. Тогда число $10^k n_1$ делится на 5^k, а значит, остатки от деления чисел n и n_0 на 5^k совпадают и, стало быть, могут равняться 0 только одновременно.

2.4. Число n делится на 2^k в том и только в том случае, если на 2^k делится число n_0, полученное из числа n отбрасыванием всех его цифр, кроме k последних. Данное утверждение следует из представления числа n в виде $10^k n_1+n_0$ и того факта, что число $10^k n_1$ делится на 2^k.

2.5. Проще всего в данном двузначном числе выделить наибольшее возможное четное число десятков (ведь любое число, кратное 20, кратно и 4), в результате чего останется число, меньшее 20, для которого проверка делимости на 4 уже не представляет труда. Например, число $76=60+16$ делится на 4, а число $94=80+14$ не делится.

2.6. Заметим, что любое четное число сотен делится на 8, а нечетное дает при делении на 8 остаток 4 и недостаток —4. Поэтому, отбросив цифру сотен данного трехзначного числа, достаточно проверить, делится ли на 8 оставшееся двузначное число в чистом виде, если цифра сотен была четной, либо предварительно увеличенное или уменьшенное на 4, если цифра сотен была нечетной. Кроме того, для упрощения проверки делимости на 8 двузначного числа можно выделить в нем наибольшее возможное число десятков, кратное 4, в результате чего останется число, меньшее 40, для которого проверка делимости на 8 уже не представляет труда. Например, число 692 не делится на 8, так как $92=80+12$ не делится на 8, а число 568 делится на 8, так как $68-4=64$ делится на 8.

2.7. Пусть данное число n имеет вид

$$\overline{n_k n_{k-1}\ldots n_1 n_0}=10^k n_k+10^{k-1}n_{k-1}+\ldots+10n_1+n_0.$$

Поскольку $10^l=\underbrace{99\ldots9}_{l\text{ раз}}+1$, то получаем

$$n=(\underbrace{99\ldots9}_{k\text{ раз}}\times n_k+n_k)+(\underbrace{99\ldots9}_{k-1\text{ раз}}\times n_{k-1}+n_{k-1})+\ldots$$

$$\ldots+(9\times n_1+n_1)+n_0=9(\underbrace{11\ldots1}_{k\text{ раз}}\times n_k+$$

$$+\underbrace{11\ldots1}_{k-1\text{ раз}}\times n_{k-1}+\ldots+n_1)+(n_k+n_{k-1}+\ldots+n_1+n_0).$$

В полученном представлении числа n первое выражение делится как на 3, так и на 9, поэтому остатки от деления числа n и суммы всех его цифр $n_k+n_{k-1}+\ldots+n_1+n_0$ как на 3, так и на 9 совпадают.

2.8. Для упрощения проверки делимости суммы цифр данного числа на 3 можно заменять цифры их остатками или недостатками от деления на 3. Например, сумма цифр числа 2 795 438 дает тот же остаток при делении на 3, что и сумма $2+1+0-1+1+0-1=2$.

2.9. Для упрощения проверки делимости суммы цифр данного числа на 9 можно отбрасывать те цифры, которые в сумме дают 9 или 18. Например, сумма цифр числа 7 543 782 861 дает тот же остаток при делении на 9, что и число 6, поскольку сумма всех остальных цифр $(7+2)+(5+4)+(3+7+8)+(8+1)$ кратна 9.

2.10. Пусть число m k-значное. Тогда среди чисел от 10^{k+1} до $10^{k+1}+m$ хотя бы одно число делится на m. Это число имеет вид $\overline{10m_km_{k-1}\ldots m_1}$, а так как признак делимости на m не зависит от порядка цифр делимого, то числа $\overline{m_km_{k-1}\ldots m_110}$ и $\overline{m_km_{k-1}\ldots m_101}$ также кратны m. Поэтому число m является делителем разности этих чисел, равной 9, а значит, либо $m=3$, либо $m=9$ (случай $m=1$ исключен в условии задачи).

2.11. Описанная в задаче проверка сложения основана на том, что если при подсчете суммы нескольких чисел не было сделано ошибки, то эта сумма должна давать тот же остаток при делении на какое-либо число m, что и сумма остатков от деления слагаемых на m. При этом нахождение остатков от деления на $m=9$ по сумме цифр не требует серьезных усилий, что и нашло отражение в предложенном способе. Если складывались числа разного знака, то сумма всех положительных слагаемых должна давать тот же остаток при делении на m, что и сумма всех отрицательных слагаемых вместе с полученным в ответе числом. Для нахождения этих остатков при $m=9$ достаточно заменить сами числа суммами их цифр.

2.12. Описанная в задаче проверка умножения основана на том, что если при подсчете произведения нескольких чисел не было сделано ошибки, то это произведение должно давать тот же остаток при делении на m (в задаче взято $m=9$), что и произведение остатков от деления сомножителей на m. Проверка деления числа a на число b, в результате которого получены частное q и остаток r, сводится к проверке равенства

$$a=qb+r,$$

т. е. двух операций сразу: умножения и сложения. Это можно сделать, сравнив остатки от деления на m числа a и числа $qb+r$, в котором каждое из чисел q, b и r можно заменить остатком от деления на m. Если остатки не совпадут, то в вычислениях имеется ошибка.

2.13. Совпадение остатков от деления двух чисел на 9 не дает возможности утверждать равенство самих этих чисел: например, числа 49 и 40 имеют одинаковые остатки, но не совпадают друг с другом. Поэтому описанные в задачах 2.11 и 2.12 способы проверки вычислений не могут дать гарантии от ошибок. Та же пара чисел показывает, что даже в случае правильности всех цифр ответа, кроме, быть может, одной, этих проверок, вообще говоря, не достаточно (исключение составляет случай, когда в ответе нет ни одной цифры 0 и 9, поскольку тогда любое изменение одной цифры ответа влечет за собой изменение его остатка от деления на 9).

2.14. Если бы линейка стоила на 1 копейку дешевле, то общая стоимость товаров, выраженная в копейках, была бы кратна 4, так как в этом случае стоимость каждого вида перечисленных в условии предметов делилась бы на 4. Поскольку названа сумма 5 рублей 27 копеек, то число $27-1=26$ должно делиться на 4 (см. задачу 2.5), что неверно. Таким образом, сумма подсчитана с ошибкой.

2.15. Представим данные числа в виде $6=2\times3$, $12=4\times3$, $15=3\times5$, $18=2\times9$, $24=8\times3$, $36=4\times9$, $45=9\times5$ и воспользуемся следующим утверждением: делимость на число $m=pq$, представляющее собой произведение взаимно простых чисел p и q, равносильна одновременной делимости на p и на q. Взаимная простота чисел p и q играет существенную роль, поскольку без этого требования утверждение было бы неверно. Например, несмотря на справедливость разложения $24=4\times6$, из делимости числа 12 на 4 и на 6 не следует его делимость на 24. В то же время делимость какого-либо числа на 8 и на 3 влечет за собой его делимость на 24.

2.16. Пусть q_1, q_2, q_3,...—частные от деления на m чисел 10^1, 10^2, 10^3,... соответственно с остатками m_1, m_2, m_3, ... Тогда справедливо представление

$$n=n_0+10n_1+10^2n_2+\ldots+10^kn_k=n_0+(q_1m+m_1)n_1+$$
$$+(q_2m+m_2)n_2+\ldots+(q_km+m_k)n_k=$$
$$=n_0+m_1n_1+m_2n_2+\ldots+m_kn_k+(q_1n_1+q_2n_2+\ldots+q_kn_k)m,$$

из которого следует, что числа n и

$$f_m(n)=n_0+m_1n_1+m_2n_2+\ldots+m_kn_k$$

дают одинаковые остатки при делении на m. Кроме того, если при последовательном вычислении остатков m_1, m_2, m_3,... уже найден остаток m_k, то остаток от деления на m числа

$$10^{k+1}=10\times10^k=10(q_km+m_k)=10q_km+10m_k$$

равен остатку от деления на m слагаемого $10m_k$ в последней сумме.

2.17. Полагая в признаке Паскаля $m=2$, $m=3$, $m=5$ и $m=9$, получаем для $(k+1)$-значного числа n следующие числа:

$$f_2(n)=n_0,$$
$$f_3(n)=n_0+n_1+n_2+\ldots+n_k,$$
$$f_5(n)=n_0,$$
$$f_9(n)=n_0+n_1+n_2+\ldots+n_k.$$

Эти числа определяют в точности те же признаки делимости, что и сформулированные в задачах 2.4, 2.8, 2.1, 2.9.

2.18. Полагая в признаке Паскаля $m=4$ и $m=8$, получаем для k-значного числа n следующие числа:

$$f_4(n)=n_0+2n_1,\qquad f_8(n)=n_0+2n_1+4n_2.$$

Получаемые в результате признаки делимости на 4 и на 8 несколько отличаются от приведенных в задачах 2.5 и 2.6, однако вряд ли могут рассматриваться как более простые, поскольку, на наш взгляд, требуют чуть больше вычислений.

2.19. Доказательство модификации признака Паскаля, по существу, ничем не отличается от доказательства, приведенного в решении задачи 2.16. Разница состоит лишь в том, что деление каких-то из чисел 10^1, 10^2, 10^3, ... на m

нужно провести не с остатком, а с недостатком, т. е. в соответствующих формулах

$$10^k=q_k m+m_k$$

положительные числа m_k взять на m меньшими прежних (отрицательными), а q_k — на 1 большими прежних.

2.20. Производя в признаке Паскаля деление степеней десятки на 11 попеременно то с остатком, то с недостатком, имеем

$$\begin{aligned} &10=11-1, && m_1=-1,\\ &10m_1=-10=-11+1, && m_2=1,\\ &10m_2=10=11-1, && m_3=-1,\ \ldots, \end{aligned}$$

откуда получаем, что число $n=\overline{n_k\ldots n_2n_1n_0}$ дает тот же остаток при делении на 11, что и число

$$f_{11}(n)=n_0-n_1+n_2-n_3+\ldots+(-1)^k n_k.$$

Поэтому для делимости числа n на 11 необходимо и достаточно, чтобы суммы $n_0+n_2+\ldots$ и $n_1+n_3+\ldots$ отличались друг от друга на число, кратное 11.

2.21. Подставляя значение $m=11$ в утверждения, сформулированные в решениях задач 2.11 и 2.12, и используя признак делимости на 11, получаем способы проверки сложения и умножения. Если у числа n, представляющего собой истинный ответ, заменить одну цифру на неверную, то число $f_{11}(n)$ обязательно изменится на некоторое число, меньшее 11 (даже меньшее 10), а значит, будет давать другой, уже неверный остаток от деления на 11. Поэтому, сравнив его с верным остатком, можно обнаружить ошибку. Более того, если известно, в какой именно цифре числа n возможна ошибка, эту цифру можно однозначно восстановить.

2.22. Действуя согласно модифицированному признаку Паскаля, при $m=7$ имеем

$$\begin{aligned} &10=7+3, && m_1=3,\\ &10m_1=30=28+2, && m_2=2,\\ &10m_2=20=21-1, && m_3=-1,\\ &10m_3=-10=-7-3, && m_4=-3,\\ &10m_4=-30=-28-2, && m_5=-2,\\ &10m_5=-20=-21+1, && m_6=1,\\ &10m_6=10=7+3, && m_7=3,\ \ldots, \end{aligned}$$

откуда получаем, что число $n=\overline{n_k \dots n_2 n_1 n_0}$ дает тот же остаток при делении на 7, что и число

$$f_7(n)=n_0+3n_1+2n_2-(n_3+3n_4+2n_5)+\dots$$

2.23. Пусть все цифры числа n разбиты на тройки, образующие трехзначные числа n_0, n_1, $n_2, \dots, n_k$ (начиная справа). Тогда число

$$n=n_0+10^3n_1+10^6n_2+\dots+10^{3k}n_k=n_0+(999n_1+n_1)+$$
$$+(999999n_2+n_2)+\dots+(\underbrace{99\dots9}_{3k\text{ раз}}n_k+n_k)=$$
$$=(n_0+n_1+n_2+\dots+n_k)+$$
$$+999(n_1+1001n_2+\dots+\underbrace{1001\dots001}_{k\text{ единиц}}n_k)$$

дает при делении на 37 тот же остаток, что и сумма n_0+ $+n_1+n_2+\dots+n_k$, поскольку в полученном представлении числа n второе выражение делится на $999=37\times27$. Если указанная сумма является более чем трехзначным числом, то к ней можно применить те же рассуждения, что и к исходному числу n, и этот процесс можно продолжать до тех пор, пока не получится трехзначное число. Наконец, любое трехзначное число $\overline{abc}$ сводится к двузначному переходом к разности чисел $\overline{abc}$ и $\overline{aaa}=a\times111=a\times37\times3$.

2.24. Учитывая равенство $1001=7\times11\times13$, получаем, что недостаток m_1 при делении числа 10^3 (на любое из чисел 7, 11, 13) равен -1. Остаток m_2 от деления числа 10^6 равен остатку от деления числа $10^3m_1=-1000=-1001+1$, т. е. равен 1. Недостаток m_3 от деления числа 10^9 равен недостатку от деления числа $10^3m_2=1000=1001-1$, т. е. равен -1, и т. д. Поэтому если все цифры числа n разбиты на тройки, образующие трехзначные числа n_0, n_1, n_2, $n_3, \dots$ $\dots, n_k$ (начиная справа), то число

$$n=n_0+10^3n_1+10^6n_2+10^9n_3+\dots+10^{3k}n_k$$

дает при делении на любое из чисел 7, 11, 13 тот же остаток, что и число

$$n_0-n_1+n_2-n_3+\dots+(-1)^k n_k.$$

Такие же рассуждения можно применить к указанной сумме еще и еще раз до тех пор, пока не получится трехзначное число (возможно, отрицательное). Остаток от деления этого числа на 7, 11, 13 будет таким же, как и у исходного числа n.

2.25. Заметим, что число $10m-1$ не имеет общих делителей с числом 10, так как оно не делится ни на 2, ни на 5. Поэтому число $n+n_0m$ делится на $10m-1$ тогда и только тогда, когда на $10m-1$ делится число

$$10(n+n_0m)=10n+10mn_0=(10n+n_0)+(10m-1)n_0,$$

т. е. когда на $10m-1$ делится первое выражение $10n+n_0$ в полученном представлении. Полагая в доказанном утверждении $m=2$, получаем, что число $10n+n_0$ делится на 19 только одновременно с числом $n+2n_0$. Таким образом, мы имеем следующий признак делимости на 19. В данном числе $10n+n_0$ отбросим последнюю цифру n_0 и, удвоив ее, прибавим к числу n, составленному из остальных цифр исходного числа. Проделав эту процедуру несколько раз, придем к не более чем двузначному числу, которое будет делиться на 19 в том и только в том случае, если на 19 делилось исходное число. Например, для числа 3 086 379 получаем последовательность чисел 308 655, 30 875, 3097, 323, 38, последнее из которых, а значит, и исходное кратно 19.

2.26. Так как число $10m+1$ взаимно просто с числом 10, то число $n-n_0m$ делится на $10m+1$ только одновременно с числом

$$10(n-n_0m)=10n-10mn_0=(10n+n_0)-(10m+1)n_0,$$

т. е. одновременно с числом $10n+n_0$. Полагая в доказанном утверждении $m=3$, получаем следующий признак делимости на 31. В данном числе $10n+n_0$ отбросим последнюю цифру n_0 и, утроив ее, вычтем из числа n, составленного из остальных цифр исходного числа. Повторяя эту процедуру, мы придем к не более чем двузначному числу (возможно, отрицательному), которое будет делиться на 31 только одновременно с исходным числом. Например, для числа 2 886 379 имеем последовательность чисел 288 610, 28 861, 2883, 279, 0, последнее из которых, а значит, и исходное кратно 31.

2.27. Число $10m+3$ не имеет общих делителей с числом 10, так как оно не делится ни на 2, ни на 5. Поэтому число $n+n_0(3m+1)$ делится на $10m+3$ только одновременно с числом

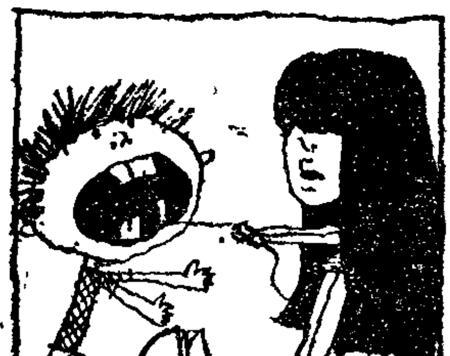
$$10(n+n_0(3m+1))=(10n+n_0)+(30m+9)n_0=$$
$$=(10n+n_0)+3(10m+3)n_0,$$

т. е. одновременно с числом $10n+n_0$. Полагая $m=1$, получаем признак делимости на 13, согласно которому, отбросив в данном числе последнюю цифру n_0 и прибавив учетверенную ($3m+1=4$) эту цифру к числу n, составленному из остальных цифр исходного числа, получим число, которое будет делиться на 13 только одновременно с исходным числом. Учитывая признак делимости на 13, описанный в задаче 2.24, мы рассмотрим указанную схему лишь в применении к трехзначным числам. Например, для числа 481 последовательно получаем числа 52, 13, последнее из которых, а значит, и исходное кратно 13.

2.28. Так как число $10m-3$ взаимно просто с числом 10, то число $n-n_0(3m-1)$ делится на $10m-3$ только одновременно с числом

$$10(n-n_0(3m-1))=(10n+n_0)-(30m-9)n_0=$$
$$=(10n+n_0)-3(10m-3)n_0,$$

т. е. одновременно с числом $10n+n_0$. Полагая $m=2$, получаем признак делимости на 17, согласно которому, отбросив в данном числе последнюю цифру n_0 и вычтя упятеренную ($3m-1=5$) эту цифру из числа n, составленного из остальных цифр исходного числа, мы получим число, которое будет делиться на 17 только одновременно с исходным числом. Например, применяя эту процедуру несколько раз к числу 1 067 481, последовательно получим числа 106 743, 10 659, 1020, 102,0, последнее из которых, а значит, и исходное, делится на 17.



§ 3. ЛЕГКО ЛИ ИЗВЛЕКАТЬ КОРНИ!

Одной из наиболее трудоемких арифметических операций является извлечение корня квадратного, кубического или другой степени из данного числа. Относительно просто корень можно найти в том случае, когда заранее известно, что он представляет собой целое число, т. е. извлекается нацело. В некоторых случаях при извлечении корня приходится искать лишь приближенное его значение с наперед заданной точностью. Напомним, что приближенным значением величины a с точностью до числа $\delta>0$ называется любое (вообще говоря, не единственное) число x, удовлетворяющее оценкам

$$a-\delta\leqslant x\leqslant a+\delta.$$

Приближенное равенство $\pi \approx 3{,}14$, к примеру, означает, что число 3,14 есть приближенное значение числа π с точностью до половины единицы последнего разряда, т. е. до $\frac{1}{2\times10^2}$. В настоящем параграфе вы познакомитесь с некоторыми методами нахождения корней, позволяющими довольно скоро и без особых усилий получать вполне удовлетворительные приближения.

3.1. Сколько знаков до запятой?

Десятичная запись данного числа имеет n знаков до запятой. Можно ли заранее сказать, сколько знаков до запятой будет иметь десятичная запись корня квадратного из данного числа?

3.2. Корни других степеней

Как по количеству знаков до запятой в десятичной записи данного числа определить количество знаков до запятой в десятичной записи корня кубического или корня другой степени из этого числа?

3.3. Сведение к целому числу

Каким образом можно свести извлечение корня какой-либо степени из конечной десятичной дроби к извлечению корня той же степени из целого числа? Как связаны между собой числа $\sqrt{6{,}25}$ и 25, $\sqrt{4{,}9}$ и 7?

3.4. Разложив на простые множители

Разложив целое число на простые множители, можно определить, извлекается ли из него нацело корень данной степени. Попробуйте таким путем определить, корни каких степеней извлекаются нацело из числа 1728.

3.5. Корень пятой степени в уме

Возведите в пятую степень каждое из чисел 0, 1, 2, ..., 9 и придумайте способ быстрого извлечения корня пятой степени из данного целого числа, имеющего в десятичной записи не более 10 знаков, в предположении, что этот корень извлекается из данного числа нацело.

Найдите корни $\sqrt[5]{16\,807}$, $\sqrt[5]{6436\,343}$.

3.6. Корень кубический в уме

Возведите в куб каждое из чисел 0, 1, 2, . . ., 9 и придумайте способ быстрого извлечения корня кубического из данного целого числа, имеющего в десятичной записи не более шести знаков, в предположении, что этот корень извлекается из данного числа нацело.

Найдите корни $\sqrt[3]{2\,744}$, $\sqrt[3]{474\,552}$.

3.7. Корень квадратный в уме

Каким способом можно быстро извлечь корень квадратный из целого числа, имеющего в десятичной записи не более четырех знаков, в предположении, что этот корень извлекается из данного числа нацело?

Найдите корни $\sqrt{9025}$, $\sqrt{3249}$. Попробуйте найти корень $\sqrt{15\,876}$ наиболее простым способом.

3.8. По остатку от деления на 11

Укажите, как по остатку от деления на 11 куба целого числа можно найти остаток от деления на 11 самого числа. Пользуясь признаком делимости на 11, придумайте способ быстрого извлечения корня кубического из данного целого числа, имеющего в десятичной записи от семи до девяти знаков, в предположении, что этот корень извлекается нацело. Найдите корень $\sqrt[3]{99\,252\,847}$.

3.9. Алгоритм извлечения корня квадратного

Для нахождения корня $\sqrt{273\,529}$ произведем следующие действия (см. рис. 2):

$$\sqrt{27'35'29} = 523$$

$$\begin{array}{r} 102 \\ \times\quad 2 \\ \hline 204 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1043 \\ \times\quad 3 \\ \hline 3129 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 27 \\ -\,25 \\ \hline 235 \\ -\,204 \\ \hline 3129 \\ -\,3129 \\ \hline 0 \end{array}$$

Рис. 2

а) десятичную запись числа 273 529 разобьем на группы по две цифры (как в решении задачи 3.1);

б) для старшей группы цифр, образующей число 27, подберем такую цифру, чтобы ее квадрат был наибольшим, но не превосходил числа 27; такой цифрой будет 5, ее и запишем в качестве первой цифры ответа;

в) из старшей группы цифр вычтем найденный в предыдущем пункте квадрат первой цифры ответа и к полученной разности (остатку) 27—25=2 припишем справа (снесем) следующую группу цифр 35; получим число 235;

г) удвоив записанное в ответе число 5, припишем справа такую цифру, чтобы произведение полученного в результате числа на эту цифру было наибольшим, но не превосходило числа 235; такой цифрой будет 2 (ибо $102\times\times2=204<235$, но $103\times3=309>235$), ее и запишем в качестве второй цифры ответа;

д) из числа 235 вычтем найденное в предыдущем пункте произведение 204 и к остатку 31 снесем следующую группу цифр 29; получим число 3129;

е) удвоив записанное в ответе число 52, припишем справа такую цифру, чтобы произведение полученного в результате числа на эту цифру было наибольшим, но не превосходило числа 3129; такой цифрой будет 3 (ибо $1043\times3=$ $=3129$), ее и запишем в качестве третьей цифры ответа;

ж) разность между снесенным числом 3129 и полученным в предыдущем пункте произведением равна 0, поэтому корень квадратный из числа 273 529 извлекается нацело и равен записанному в ответе числу 523.

Приведите обоснование предложенному алгоритму и найдите с его помощью корень $\sqrt{8\,259\,876}$.

3.10. Где остановиться?

Объясните, как следует поступать в случае, если предложенный в задаче 3.9 алгоритм в применении к данному числу не заканчивается ни на каком шаге, т. е. не наступает ситуация, описанная в п. ж) задачи 3.9. Докажите, что предложенный алгоритм позволяет и в этом случае находить значение корня квадратного с любой наперед заданной точностью. Найдите приближенное значение $\sqrt{5}$ с точностью до $\frac{1}{2\times10^4}$.

3.11. Приближенная формула корня квадратного

Найдя какое-нибудь, пусть даже совсем грубое, приближенное значение $x>0$ корня квадратного из данного числа $a=x^2+b$, мы можем значительно улучшить приближение с помощью формулы

$$\sqrt{x^2+b}\approx x+\frac{b}{2x}.$$

Докажите, что погрешность $\delta=\left(x+\frac{b}{2x}\right)-\sqrt{a}$ полученного приближения будет удовлетворять оценкам

$$0<\delta<\frac{b^2}{8x^2\sqrt{a}}.$$

Какое значение для $\sqrt{5}$ даст приведенная формула, если в качестве грубого приближения взять целую часть этого корня, а именно число $x=2$?

3.12. Способ Герона

Выберем какое-либо приближение x_0 корня квадратного из данного числа a (например, $x_0=a$) и будем последовательно улучшать приближения по формулам

$$x_1=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{a}{x_0}\right),$$

$$x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)$$

и т. д. Докажите, что погрешности $\delta_n=x_n-\sqrt{a}$ (для приближений $\sqrt{a}$ числами последовательности x_n) удовлетворяют оценкам

$$0<\delta_1\leqslant\frac{\delta_0^2}{2x_0},\quad 0<\delta_{n+1}<\frac{\delta_n^2}{2\sqrt{a}},\quad n=1,\ 2,\ \ldots$$

Проверьте, что этот способ сводится к многократному применению приближенной формулы корня квадратного (см. задачу 3.11). Найдите с помощью способа Герона приближенное значение $\sqrt{5}$, взяв $x_0=2$ и проделав два шага. Оцените точность найденного приближения.

3.13. Почти удвоение точности

Пусть после вычисления первых n значащих цифр корня квадратного из данного числа a (например, с помощью алгоритма задачи 3.9) в ответе получилось приближенное значение x и остаток $b=a-x^2$. Объясните, почему приближение $\sqrt{a}\approx x+\frac{b}{2x}$ задает в дополнение к n первым знакам еще по меньшей мере $n-1$ верных знаков корня. Пользуясь вычислениями задачи 3.10, найдите приближенное значение $\sqrt{5}$ с точностью до $\frac{1}{2\times10^{16}}$.

3.14. Приближенная формула корня кубического

Найдя какое-нибудь приближение $x>0$ корня кубического из данного числа $a=x^3+b$, можно значительно улучшить приближение с помощью формулы

$$\sqrt[3]{x^3+b} \approx x + \frac{b}{3x^2}.$$

Оцените при $b>0$ погрешность $\delta = \left(x + \frac{b}{3x^2}\right) - \sqrt[3]{a}$ полученного приближения, рассмотрев отдельно случай, когда число x представляет собой целую часть искомого корня.

Найдите приближенное значение $\sqrt[3]{10}$ по указанной формуле, оценив погрешность.

Решения

3.1. Пусть число a содержит в десятичной записи m знаков до запятой. Тогда справедливы оценки

$$\underbrace{10\ldots0}_{m\text{ знаков}} = 10^{m-1} \leqslant a < 10^m = \underbrace{10\ldots0}_{m\text{ нулей}},$$

из которых следует, что квадрат числа a имеет либо $2m$, либо $2m-1$ знаков до запятой, так как

$$\underbrace{10\ldots0}_{2m-1\text{ знак}} = 10^{2(m-1)} \leqslant a^2 < 10^{2m} = \underbrace{10\ldots0}_{2m\text{ нулей}}.$$

Поэтому если данное число имеет четное число $n=2m$ знаков или нечетное число $n=2m-1$ знаков до запятой, то корень квадратный из него имеет m знаков до запятой.

Обычно, чтобы найти количество знаков корня квадратного, цифры десятичной записи исходного числа разбивают на группы справа налево, начиная от запятой и включая в каждую группу по две цифры (кроме, быть может, самой левой группы, в которой в случае нечетного количества этих цифр окажется только одна цифра). Тогда количество полученных групп как раз и совпадет с искомым количеством знаков корня.

3.2. Как и в решении задачи 3.1, заметим, что если число a содержит в десятичной записи m знаков до запятой, то его куб имеет либо $3m$, либо $3m-1$, либо $3m-2$ знака до запятой, так как

$$\underbrace{10\ldots0}_{3m-2\text{ знака}} = 10^{3(m-1)} \leqslant a^3 < 10^{3m} = \underbrace{10\ldots0}_{3m\text{ нулей}}.$$

Поэтому искомое количество знаков корня кубического совпадает с количеством групп, на которые разбиваются цифры десятичной записи исходного числа справа налево, считая от запятой по три цифры в группе (кроме, возможно, последней группы).

Аналогично искомое количество знаков корня k-й степени равно количеству групп по k цифр (в последней группе может быть менее k цифр), на которые разбиваются цифры десятичной записи исходного числа, считая от запятой. Это вытекает из неравенств

$$10^{k(m-1)} \leqslant a^k < 10^{km},$$

справедливых для любого числа a, имеющего в десятичной записи m знаков до запятой.

3.3. Для того чтобы свести извлечение корня k-й степени из конечной десятичной дроби к извлечению корня k-й степени из целого числа, достаточно в исходной дроби перенести запятую вправо на подходящее число qk разрядов, а затем извлечь корень из полученного целого числа и перенести запятую у результата влево на q разрядов. Справедливость этого утверждения основывается на равенстве

$$\sqrt[k]{a} = \frac{\sqrt[k]{10^{qk}a}}{10^q}.$$

Из этого же равенства получаем зависимость между числами $\sqrt{6,25}$ и 25:

$$\sqrt{6,25} = \frac{\sqrt{100 \times 6,25}}{10} = \frac{\sqrt{625}}{10} = \frac{25}{10},$$

а для чисел $\sqrt{4,9}$ и $7 = \sqrt{49}$ зависимость далеко не так удобна:

$$\sqrt{4,9} = \sqrt{\frac{49}{10}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{10}} = \frac{7}{\sqrt{10}}.$$

3.4. Так как $1728 = 2^6 \times 3^3$, то нацело из числа 1728 извлекается только корень кубический

$$\sqrt[3]{2^6 \times 3^3} = 2^2 \times 3 = 12.$$

Дело в том, что показатели 6 и 3 степеней, в которых простые множители входят в разложение данного числа, имеют лишь один общий делитель, отличный от 1. Этот общий делитель — число 3 — как раз и указывает на возможность извлечения корня соответствующей (третьей) степени.

3.5. Возведем каждое из целых чисел от 0 до 9 в пятую степень:

$$
\begin{array}{ll}
0^5=0, & 5^5=3125, \\
1^5=1, & 6^5=7776, \\
2^5=32, & 7^5=16807, \\
3^5=243, & 8^5=32768, \\
4^5=1024, & 9^5=59049.
\end{array}
$$

Заметим, что каждое из полученных в результате чисел оканчивается той же цифрой, что и соответствующее основание пятой степени. Тот же вывод можно распространить и на случай, когда основанием пятой степени является многозначное целое число, поскольку последняя цифра результата при этом полностью определяется последней цифрой основания степени.

Теперь при извлечении корня пятой степени из данного числа в предположении, что этот корень извлекается нацело, очень легко определяется последняя цифра корня — она просто совпадает с последней цифрой данного числа. Например, последняя цифра корня $\sqrt[5]{16\,807}$ равна 7, однако искомый корень имеет в десятичной записи всего одну цифру до запятой (см. задачу 3.2), а значит, этот корень просто равен 7, что подтверждается приведенными выше вычислениями.

Аналогично легко определяется последняя цифра 3 корня $\sqrt[5]{6\,436\,343}$. Что же касается предпоследней цифры корня (а согласно решению задачи 3.2, если этот корень целый, то он представляет собой двузначное число), то ее можно определить с помощью сравнений:

$$20^5=32'00000\leqslant 64'36343<243'00000=30^5,$$

из которых следует, что искомый корень удовлетворяет неравенствам

$$20\leqslant \sqrt[5]{6\,436\,343}<30.$$

Поэтому первая его цифра не может быть никакой другой цифрой, кроме 2. Следовательно, еам корень равен 23, что подтверждается непосредственной проверкой возведением его в пятую степень.

3.6. Возведем каждое из целых чисел от 0 до 9 в куб:

$$
\begin{array}{ll}
0^3=0, & 5^3=125, \\
1^3=1, & 6^3=216, \\
2^3=8, & 7^3=343, \\
3^3=27, & 8^3=512, \\
4^3=64, & 9^3=729.
\end{array}
$$

Заметим, что все полученные в результате числа оканчиваются разными цифрами. Проанализировав, какими именно цифрами они оканчиваются, заключаем, что последняя цифра куба любого целого числа либо совпадает с последней цифрой основания (если эта цифра есть 0, 1, 4, 5, 6 или 9), либо совпадает с дополнением последней цифры основания до 10 (если эта цифра есть 2, 3, 7 или 8).

Таким образом, последняя цифра числа $\sqrt[3]{2744}$, если это число является целым, однозначно определяется последней цифрой его куба 2744, стало быть, она равна 4. Отбрасывая три последние цифры числа 2744, мы получаем число 2, которое расположено между кубами чисел 1 и 2, поэтому первая цифра искомого корня (а их всего две согласно решению задачи 3.2) равна 1:

$$10 \leqslant \sqrt[3]{1000} \leqslant \sqrt[3]{2744} < \sqrt[3]{8000} = 20.$$

Итак, искомый корень равен 14, что подтверждается проверкой.

Наконец, аналогично находим, что последняя цифра числа $\sqrt[3]{474\,552}$, если это число является целым, равна 8, а первая (она же предпоследняя) равна 7, так как $7^3 = 343 \leqslant 474 < 8^3 = 512$, т. е. это число равно 78, что затем проверяется непосредственно.

3.7. В отличие от случаев с нечетными степенями, рассмотренных в задачах 3.5 и 3.6, последняя цифра целого числа, вообще говоря, не восстанавливается однозначно по последней цифре его квадрата. Действительно, одинаковыми цифрами оканчиваются квадраты чисел, взаимно дополняющих друг друга до 10:

$$\begin{array}{lcl} 1^2 = 1 & \text{и} & 9^2 = 81, \\ 2^2 = 4 & \text{и} & 8^2 = 64, \\ 3^2 = 9 & \text{и} & 7^2 = 49, \\ 4^2 = 16 & \text{и} & 6^2 = 36. \end{array}$$

Но «индивидуальными» цифрами оканчиваются квадраты $0^2 = 0$, $5^2 = 25$. Таким образом, последняя цифра числа $\sqrt{9025}$ в предположении, что это число целое, равна 5, а первая равна 9, так как

$$90 = \sqrt{8100} \leqslant \sqrt{9025} < \sqrt{10\,000} = 100.$$

Поэтому искомый корень может быть равен только 95, что и оказывается верным.

Менее простым для вычисления является корень квадратный из числа 3249. Первая цифра этого корня равна 5, так как $5^2=25\leqslant 32<36=6^2$, а вторая, если искомое число целое, равна либо 3, либо 7, т. е. вторая цифра либо меньше 5, либо больше 5. Но это можно проверить, сравнив число $\sqrt{3249}$ с числом 55. Из оценки (см. задачу 1.17)

$$55^2=5\times 6\times 100+25=3025<3249$$

вытекает, что искомый корень больше 55, а значит, равен 57, что подтверждается проверкой.

Для нахождения числа $\sqrt{15\,876}$ в предположении, что оно целое, определим первые две его цифры из неравенств

$$12^2=144\leqslant 158<169=13^2.$$

Итак, искомый корень трехзначен, начинается цифрами 1, 2, а кончается либо цифрой 4, либо цифрой 6. Так как этот корень больше числа 125, что следует из оценки

$$125^2=12\times 13\times 100+25=15\,625<15\,876,$$

то он равен 126.

3.8. Подсчет показывает (см. решение задачи 3.6), что остатки от деления на 11 кубов целых чисел от 0 до 10 равны соответственно 0, 1, 8, 5, 9, 4, 7, 2, 6, 3, 10. Анализ этих остатков показывает, что все они различны и по ним однозначно восстанавливаются соответствующие основания кубов. Поэтому, зная остаток от деления на 11 данного числа, из которого нацело извлекается корень кубический, можно определить остаток от деления на 11 этого корня. Если мы знаем первую и последнюю цифры трехзначного корня кубического (а именно таким он должен оказаться в условиях задачи), то средняя цифра этого корня определяется остатком от его деления на 11.

Например, методами задачи 3.6 вычисляются первая цифра 4 и последняя цифра 3 корня кубического из числа 99 252 847. Сосчитав остаток от деления исходного числа на 11, равный остатку от деления на 11 выражения

$$7-4+8-2+5-2+9-9=12$$

(см. признак делимости — задачу 2.20), т. е. равный числу 1, заключаем, что остаток от деления на 11 искомого корня равен 1. После этого из условия, что число $\overline{4x3}$, а с ним и число $3-x+4=7-x$, должно давать при делении на 11 остаток 1, мы однозначно определяем среднюю цифру $x=6$ корня и в конечном счете сам корень 463. Остается лишь убедиться в том, что он действительно удовлетворяет равенству $463^3 = 99\,252\,847$.

3.9. Предложенный алгоритм в разобранном случае базируется на представлении

$$
\begin{aligned}
&273\,529 = 5\times5\times10\,000 + \\
&\qquad + (2\times5\times10+2)\times2\times100 + (2\times52\times10+3)\times3 = \\
&\qquad = 500\times500 + (2\times500+20)\times20 + (2\times520+3)\times3 = \\
&\qquad = 500^2 + 2\times500\times20 + 20^2 + 2\times520\times3 + 3^2 = \\
&\qquad = (500+20+3)^2,
\end{aligned}
$$

из которого вытекает равенство $\sqrt{273\,529} = 523$. В общем же случае алгоритм позволяет представить данное число, являющееся квадратом целого числа, в виде

$$
\begin{aligned}
&(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = a_1^2 + (2a_1 + a_2)\,a_2 + \\
&+ (2\,(a_1 + a_2) + a_3)\,a_3 + \ldots + (2\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + a_n)\,a_n,
\end{aligned}
$$

где числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ выбираются максимально возможными, кратными соответствующим степеням десяти: 10^{n-1}, $10^{n-2}, \ldots, 10^0$, т. е. указывают цифры в соответствующих разрядах десятичной записи корня.

Нахождение корня $\sqrt{8\,259\,876}$ по этому алгоритму записывается так:

$$
\begin{array}{r}
\times\,48 \\ 8 \\ \hline 384
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\times\,567 \\ 7 \\ \hline 3969
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\times\,5744 \\ 4 \\ \hline 22\,976
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\sqrt{8'25'98'76} = 2874, \\
-4 \\ \hline
\;\;4\,25 \\
-3\,84 \\ \hline
\;\;\;\;41\,98 \\
\;\;-39\,69 \\ \hline
\;\;\;\;\;\;2\,29\,76 \\
\;\;\;\;\;\;2\,29\,76 \\ \hline
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;0
\end{array}
$$

откуда следует, что искомый корень равен 2874.

3.10. Согласно утверждению задачи 3.3, можно без ограничения общности считать число, из которого требуется извлечь корень, целым и даже сколь угодно большим (если оно положительно), т. е. имеющим больше пар цифр, чем нужно получить знаков в десятичной записи корня. Этого можно достичь временным домножением числа на правильно подобранную четную степень числа 10 и последующим делением значения корня на вдвое меньшую степень числа 10. Если на последнем шагу получается ненулевой остаток, то можно оборвать алгоритм и считать получившийся при этом ответ приближенным значением корня с недостатком (на каждом шагу цифры ответа выбираются максимально возможными, поэтому любая десятичная дробь, превышающая полученную в ответе хотя бы по одному из ее найденных разрядов, будет больше искомого корня). Округлив полученную дробь до предпоследнего разряда, мы найдем нужное число точных знаков корня.

Для нахождения значения $\sqrt{5}$ с точностью до $\frac{1}{2\times 10^4}$ произведем следующие действия:

$$\times\begin{array}{r}42\\2\\\hline 84\end{array}\qquad \times\begin{array}{r}4466\\6\\\hline 26\,796\end{array}\qquad \begin{array}{l}\sqrt{5'00'00'00'00'00}=2{,}23606\ldots,\\ \begin{array}{r}-4\\\hline -100\\84\\\hline -16\,00\\13\,29\\\hline -27\,100\\26\,796\\\hline -3\,040\,000\\2\,683\,236\\\hline 356\,764\end{array}\end{array}$$

$$\times\begin{array}{r}443\\3\\\hline 1329\end{array}\qquad \times\begin{array}{r}447\,206\\6\\\hline 2\,683\,236\end{array}$$

из которых получаем $\sqrt{5}\approx 2{,}2361$.

3.11. Так как

$$0<a=x^2+b<x^2+b+\frac{b^2}{4x^2}=\left(x+\frac{b}{2x}\right)^2,$$

$$x+\frac{b}{2x}=\frac{x^2+a}{2x}>0,$$

то $\delta=\left(x+\frac{b}{2x}\right)-\sqrt{a}>0$. Возводя в квадрат обе части равенства

$$\sqrt{a}+\delta=x+\frac{b}{2x},$$

получаем $x^2+b+2\delta\sqrt{a}+\delta^2=x^2+b+\frac{b^2}{4x^2}$, откуда имеем

$$\delta=\frac{b^2}{4x^2(2\sqrt{a}+\delta)}<\frac{b^2}{4x^2\times 2\sqrt{a}}=\frac{b^2}{8x^2\sqrt{a}},$$

что и требовалось доказать.

Для $\sqrt{5}$ приближенная формула дает значение

$$\sqrt{2^2+1} \approx 2+\frac{1}{4}=2{,}25$$

с точностью до $\frac{1}{64}$.

3.12. Из преобразований

$$\delta_{n+1}=x_{n+1}-\sqrt{a}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)-\sqrt{a}=$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{x_n^2-2x_n\sqrt{a}+\sqrt{a^2}}{x_n}=\frac{(x_n-\sqrt{a})^2}{2x_n}=\frac{\delta_n^2}{2x_n}$$

при $n=0$ получаем первую из требуемых оценок, а при $n=1, 2, \ldots$ имеем, что число δ_n положительно, следовательно, $x_n=\sqrt{a}+\delta_n>\sqrt{a}$ и

$$\delta_{n+1}<\frac{\delta_n^2}{2\sqrt{a}}.$$

Каждое из чисел

$$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)=\frac{x_{n-1}^2+x_{n-1}^2+b}{2x_{n-1}}=x_{n-1}^2+\frac{b}{2x_{n-1}}\approx\sqrt{a}$$

фактически получается с помощью приближенной формулы *корня квадратного* (см. задачу 3.11) из числа a по грубому приближению x_{n-1} и остатку b. Поэтому предложенный способ представляет собой не что иное, как многократное применение этой формулы.

Для нахождения $\sqrt{5}$ возьмем $x_0=2$ и получим, согласно алгоритму,

$$x_1=\frac{1}{2}\left(2+\frac{5}{2}\right)=\frac{9}{4}=2{,}25,$$
$$x_2=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}+\frac{5\times 4}{9}\right)=\frac{161}{72}=2{,}23611\ldots$$

Оценим погрешность приближения:

$$\delta_2<\frac{\delta_1^2}{2\sqrt{5}}<\left(\frac{\delta_0^2}{2\times 2}\right)^2\times\frac{1}{2\sqrt{5}}=\frac{\delta_0^4}{2^5\sqrt{5}}.$$

Так как $\delta_0=\sqrt{5}-x_0<x_1-x_0=2{,}25-2=0{,}25$, то

$$\delta_2<\frac{1}{4^4\times 2^5\sqrt{5}}<\frac{1}{2^{14}}=\frac{1}{16\,384},$$

а значит, приближение $\sqrt{5}\approx x_2\approx 2{,}2361$ сразу гарантирует три верных знака после запятой (а на самом деле даже четыре знака).

3.13. Пусть число x составлено из n первых цифр ответа, а число b равно указанной в условии разности (полученной на последнем шаге алгоритма задачи 3.9). Тогда без ограничения общности можно считать, что число x целое (см. задачу 3.3) и $x \geqslant 10^{n-1}$, а искомый корень равен $x+\delta$ и $\delta<1$. Погрешность приближения

$$x+\frac{b}{2x} \approx \sqrt{a},$$

согласно утверждениям задачи 3.12, не превосходит числа

$$\frac{\delta^2}{2x} < \frac{1}{2 \times 10^{n-1}}.$$

Таким образом, приближенное значение превышает точное, но менее чем на половину единицы $(n-1)$-го разряда после запятой, т. е. оно, по существу, задает еще $n-1$ верных знаков корня $\sqrt{a}$.

Применяя доказанный факт к полученным в решении задачи 3.10 значениям $x=223\,606$ и $b=356\,764$, находим частное $\frac{b}{2x}=0{,}797\,751\ldots$, дающее следующие пять верных цифр корня:

$$\sqrt{5} \approx 2{,}2360679775.$$

3.14. Возводя в куб обе части равенства

$$\sqrt[3]{a}+\delta=x+\frac{b}{3x^2},$$

получаем

$$x^3+b+3\sqrt[3]{a^2}\delta+3\sqrt[3]{a}\delta^2+\delta^3=x^3+b+\frac{b^2}{3x^3}+\frac{b^3}{27x^6},$$

откуда имеем

$$0<\delta=\frac{\dfrac{b^2}{3x^3}+\dfrac{b^3}{27x^6}}{3\sqrt[3]{a^2}+3\sqrt[3]{a}\,\delta+\delta^2}<\frac{\dfrac{b^2}{3x^3}+\dfrac{b^3}{27x^6}}{3x^2}=\frac{b^2(9x^3+b)}{81x^8}.$$

Если x — наибольшее натуральное число, куб которого не превосходит искомого корня кубического, то справедливы неравенства

$$x^3<(x^3+b)<(x+1)^3, \qquad x \geqslant 1,$$

из которых получаем оценки

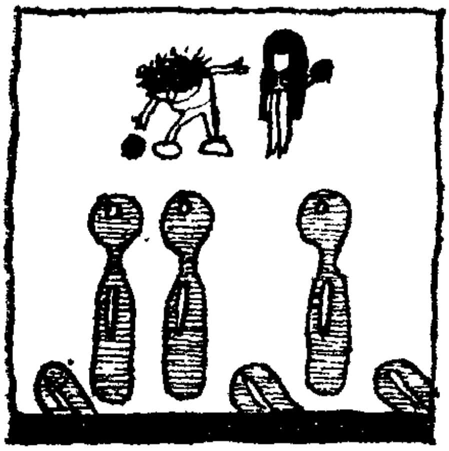
$$0<b<3x^2+3x+1 \leqslant 3x^3+3x^3+x^3=7x^3,$$

$$\delta<\frac{b^2(9x^3+7x^3)}{81x^8}=\frac{16b^2}{81x^5}.$$

Наконец, для $\sqrt[3]{10}$ приближенная формула дает значение

$$\sqrt[3]{2^3+2} \approx 2+\frac{2}{3\times 2^2}=2\frac{1}{6}$$

с точностью до $\frac{16}{81}\times\frac{2^2}{2^5}=\frac{2}{81}$.



§ 4. ПРОСТОЕ ИЛИ СОСТАВНОЕ?

При решении многих практических задач, в которых участвуют натуральные числа, немаловажную роль играет разложение этих чисел на множители. Основными «кирпичиками» в таком разложении являются простые числа, т. е. числа, большие 1 и делящиеся только на 1 и на себя. Остальные натуральные числа, большие 1, называются составными (число 1 не относится ни к простым, ни к составным). Основная теорема арифметики гласит, что *всякое натуральное число, кроме* 1, *может быть представлено в виде произведения простых множителей, причем это представление единственно, если отвлечься от порядка множителей.*

Издавна математиков интересовали вопросы о количестве и других свойствах простых чисел, а также о возможностях разложения конкретных чисел на простые множители. Еще Евклидом было доказано, что простых чисел бесконечно много. Древнегреческому математику Эратосфену был известен удобный способ отыскания простых чисел, который был назван *решетом Эратосфена.* Благодаря титаническим усилиям ряда ученых удалось получить ответы на многие, но пока не на все вопросы, связанные с распределением простых чисел в натуральном ряду. Что же касается разложения чисел на простые множители, то эта задача для больших чисел остается довольно трудной и по сей день.

4.1. Составные числа

Докажите, что составных чисел бесконечно много.

4.2. Теорема Евклида

Докажите, что простых чисел бесконечно много.

4.3. Простые числа — соседи

Могут ли два простых числа оказаться идущими подряд? А три?

4.4. Составные числа — соседи

Найдите пять последовательных натуральных чисел, каждое из которых является составным. Для любого ли натурального значения n можно подобрать n таких чисел?

4.5. Простое или составное?

Чтобы узнать, является ли данное натуральное число n составным, достаточно проверить, имеет ли оно хотя бы один делитель, больший 1 и меньший n. Докажите, что эту работу можно сократить, ограничившись проверкой делимости числа n только на простые числа и к тому же не превосходящие $\sqrt{n}$.

4.6. Простое или составное?

Разложить на простые множители число:
а) 315; б) 127; в) 1001; г) 899; д) 919.

4.7. Решето Эратосфена

Выпишем подряд все натуральные числа от 1 до некоторого числа n и зачеркнем число 1. Возьмем первое незачеркнутое число, большее 1,— это будет число 2, — и зачеркнем каждое второе число, начиная отсчет от числа $2+1$. Затем возьмем первое незачеркнутое число, большее 2,— это будет число 3,— и зачеркнем каждое третье число, начиная отсчет от числа $3+1$ (ранее зачеркнутые числа также отсчитываются). Затем возьмем первое незачеркнутое число, большее 3,— это будет число 5,— и зачеркнем каждое пятое число, начиная отсчет от числа $5+1$. Продолжая действовать так и далее, остановимся тогда, когда первое незачеркнутое число, большее предыдущего, окажется большим $\sqrt{n}$. Докажите, что в итоге незачеркнутыми останутся все простые числа, не превосходящие n, и только они.

4.8. Первые 25 простых чисел

Используя решето Эратосфена, выпишите все простые числа, не превосходящие 100.

4.9. Еще несколько простых чисел

Выпишите все простые числа, находящиеся между числами 120 и 150.

4.10. Эйлерова модификация решета

Описанную в задаче 4.7 процедуру отыскания простых чисел можно упростить, если с самого начала не выписывать чисел, кратных 2, 3 или 5. Найдите все остатки от деления на 30, которые могут давать числа, не делящиеся ни на 2, ни на 3, ни на 5.

4.11. Попробуйте сами

Выпишите все простые числа, находящиеся между числами 470 и 520.

Решения

4.1. Все четные числа, большие 2 (а их бесконечно много), являются составными, так как каждое из них делится на 1, на себя и на 2.

4.2. Предположим, что утверждение задачи не верно, т. е. простые числа образуют лишь конечное множество, состоящее из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Рассмотрим число

$$m = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1,$$

которое в силу основной теоремы арифметики делится хотя бы на одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Но тогда разность $m - p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$ также делится на это число. С другой стороны, указанная разность равна 1 и не может делиться ни на одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (больших 1). Полученное противоречие доказывает, что исходное предположение не верно, а утверждение задачи верно.

4.3. Если два простых числа идут подряд, то одно из них четно, а значит, равно 2 (см. решение задачи 4.1). Тогда второе число непременно равно 3, поскольку 1 не является простым числом. Итак, нами найдена единственная пара идущих подряд простых чисел. Отсюда следует, что тройки идущих подряд простых чисел не существует, так как из такой тройки можно было бы образовать две различные пары идущих подряд простых чисел, а именно первое число со вторым и второе с третьим.

4.4. Последовательные числа 24, 25, 26, 27, 28 образуют искомую пятерку. Докажем, что для любого натурального значения n найдутся n идущих подряд составных чисел. В самом деле, каждое из n чисел

$$(n+1)!+2,\ (n+1)!+3,\ \ldots,\ (n+1)!+n,\ (n+1)!+n+1$$

является составным, поскольку число

$$(n+1)!=1\times2\times\ldots\times n\times(n+1)$$

делится на 2, 3,..., n и $n+1$, откуда первое число $(n+1)!+2$ делится на 2, второе число $(n+1)!+3$ делится на 3,..., $(n-1)$-е число $(n+1)!+n$ делится на n, а n-е число $(n+1)!+(n+1)$ делится на $n+1$.

4.5. Докажем, что любое составное число n имеет простой делитель, не превосходящий $\sqrt{n}$. Возьмем наименьшее простое число p, участвующее в разложении числа n на простые множители. Тогда число n представляется в виде произведения pq, причем $p\leqslant q$, поэтому $p^2\leqslant pq=n$ и $p\leqslant\sqrt{n}$. Из доказанного утверждения следует, что если число n не делится ни на одно простое число, не превосходящее $\sqrt{n}$, то оно является простым.

4.6. а) $315=3^2\times5\times7$;

б) 127 — простое число, так как оно не делится ни на одно из простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, не превосходящих 11 $(11<\sqrt{127}<12)$;

в) $1001=7\times11\times13$;

г) $899=30^2-1^2=29\times31$;

д) 919 — простое число, так как оно не делится ни на одно из простых чисел, не превосходящих 29 $(30<\sqrt{919}<31)$.

4.7. В результате описанной в условии задачи процедуры в ряду чисел от 1 до n не будет зачеркнуто ни одно простое число, так как на каждом шагу зачеркиваются только числа, кратные каким-то другим числам. Число k (большее 1) из этого ряда останется незачеркнутым только в том случае, если оно не делится ни на одно из незачеркнутых чисел, не превосходящих $\sqrt{n}$, среди которых содержатся все простые числа, не превосходящие $\sqrt{k}$. Согласно задаче 4.5, таким числом k может быть только простое число. Таким образом, в ряду останутся незачеркнутыми все простые числа и только они.

4.8. Зачеркнув в ряду чисел от 1 до 100 сначала число 1, затем числа, кратные 2, кроме числа 2, затем числа, кратные 3, кроме числа 3, затем числа, кратные 5, кроме числа 5, и, наконец, числа, кратные 7, кроме числа 7, мы получим следующий набор незачеркнутых чисел:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

На этом следует остановиться, поскольку следующее за числом 7 незачеркнутое число 11 уже превосходит $\sqrt{100}=10$.

4.9. Так как $12<\sqrt{150}<13$, то наименьший простой делитель любого из составных чисел, меньших 150, не превосходит 11 (см. задачу 4.5). Вычеркнем из ряда чисел от 120 до 150 все числа, делящиеся на 2, 3 или 5, тогда останутся числа

$$121,\ 127,\ 131,\ 133,\ 137,\ 139,\ 143,\ 149.$$

Учитывая, что число 121 делится на 11, а число 140 — на 7, находим среди оставшихся чисел все числа, кратные 11 или 7. Вычеркнув их, мы получаем ответ:

$$127,\ 131,\ 137,\ 139,\ 149.$$

4.10. Число не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5 в том и только в том случае, если его остаток от деления на $30=2\times3\times5$ не делится ни на одно из этих чисел. Так как

$$5<\sqrt{30}<6,$$

то, вычеркнув из всех возможных значений остатков от деления на 30, т. е. из чисел от 0 до 29, числа, кратные 2, 3 или 5, мы получим число 1 и все простые числа (см. задачу 4.7). Следовательно, набор искомых остатков выглядит так:

$$1,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29.$$

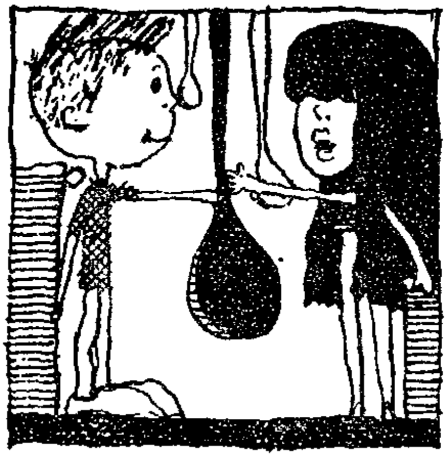
Благодаря этому наблюдению при отыскании простых чисел (бо́льших 5) можно выписывать не все числа подряд, а только те, которые дают указанные здесь восемь остатков от деления на 30, что позволяет сэкономить работу по выписыванию в $30/8=3{,}75$ раза. Именно так можно было поступить, например, при решении задачи 4.9.

4.11. Так как $22<\sqrt{520}<23$, то наименьший простой делитель любого из составных чисел, меньших 520, не превосходит 19 (см. задачу 4.5). Согласно результату задачи 4.10, простые числа могут оказаться лишь среди 12 чисел

$$473,\ 479,\ 481,\ 487,\ 491,\ 493,\ 497,\ 499,\ 503,\ 509,\ 511,\ 517.$$

Из этих чисел теперь остается только вычеркнуть числа, кратные 7 (497, 511), кратные 11 (473, 517), кратные 13 (503), кратные 17 (493) и кратные 19 (таких нет), и получить окончательный набор

$$479,\ 481,\ 487,\ 491,\ 499,\ 509.$$



§ 5. ВОКРУГ НАИБОЛЬШЕГО ОБЩЕГО ДЕЛИТЕЛЯ

Одна из простейших задач, для решения которой понадобится найти наибольший общий делитель пары натуральных чисел a и b,— это задача сокращения дроби $\frac{a}{b}$. Напомним, что если числа a и b делятся на одно и то же натуральное число d, то число d называется *общим делителем* пары чисел a и b. Любая пара натуральных чисел имеет хотя бы один общий делитель (а именно, $d=1$), причем любой общий делитель не превосходит каждого из этих чисел. Поэтому среди всех делителей чисел a и b можно выбрать наибольший общий делитель, который обозначается через (a, b), например $(20, 100)=20$, $(65, 39)=13$. Если $(a, b)=1$, то числа a и b называются *взаимно простыми*. При этом взаимно простые числа a и b совсем не обязательно сами по себе должны быть простыми числами; так, $(33, 35)=1$, но $33=3\times11$ и $35=5\times7$.

У читателя, возможно, сложилось впечатление, что нахождение наибольшего общего делителя пары чисел представляет собой очень простую задачу. Ведь если разложить на простые множители каждое из данных чисел, то сразу станет ясно, как составить из этих простых множителей наибольшее произведение, на которое делятся оба данных числа. Однако все дело в том, что разложить число на простые множители иногда бывает довольно трудно, тогда как нахождение наибольшего общего делителя можно осуществить намного проще — с помощью несложной процедуры. Эта процедура известна уже более 2 тысяч лет и носит название *алгоритма Евклида*.

Алгоритм Евклида применяется ко многим о виду разнородным объектам. Нахождение наибольшего общего делителя, разложение дроби в цепную дробь, приближение дроби более простыми, решение уравнений в целых числах — вот далеко не полный перечень приложений этого алгоритма, с которыми вы познакомитесь в настоящем и следующем параграфах.

5.1. Разлагая на множители

Найдите наибольший общий делитель пары чисел a и b путем разложения их на простые множители:

а) $a=36$, $b=20$; б) $a=1365$, $b=1225$; в) $a=1189$, $b=589$.

5.2. Первый шаг

Докажите, что если число a при делении на b дает остаток r, то

$$(a,\ b)=(b,\ r),$$

т. е. наибольший общий делитель пары чисел a и b совпадает с наибольшим общим делителем пары чисел b и r.

Каким будет наибольший общий делитель пары чисел a и b, если число a делится на b нацело?

5.3. Алгоритм Евклида

Для нахождения наибольшего общего делителя пары натуральных чисел a_1 и a_2 поступают следующим образом: деля a_1 на a_2, получают остаток a_3, затем, деля a_2 на a_3, получают остаток a_4, затем, деля a_3 на a_4, получают остаток a_5 и так далее до тех пор, пока некоторое число a_n не разделится на a_{n+1} нацело. Запись этого алгоритма можно оформить так:

$$\begin{aligned} a_1 &= q_1a_2 + a_3, \\ a_2 &= q_2a_3 + a_4, \\ a_3 &= q_3a_4 + a_5, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n-1} &= q_{n-1}a_n + a_{n+1}, \\ a_n &= q_na_{n+1} \end{aligned}$$

(числа $q_1, q_2, \ldots, q_n$ будем называть в дальнейшем *последовательными частными*).

Докажите, что описанный алгоритм обязательно закончится (т. е. при некотором значении n число a_n разделится на a_{n+1} нацело), а число a_{n+1} окажется равным наибольшему общему делителю пары чисел a_1 и a_2.

5.4. Не разлагая на множители

Применяя алгоритм Евклида, найти наибольший общий делитель пары чисел a и b, указанных в п. а), б), в) задачи 5.1.

5.5. Найдя наибольший общий делитель

Сократите дробь: а) $\frac{2147}{1577}$; б) $\frac{1326}{12\,138}$.

5.6. Разрезание на квадраты

На рис. 3 изображен прямоугольник размером 135×40, который разрезан на квадраты различной величины. Установите размеры квадратов и укажите связь между разрезанием на квадраты любого прямоугольника с целочисленными сторонами и алгоритмом Евклида (см. задачу 5.3).

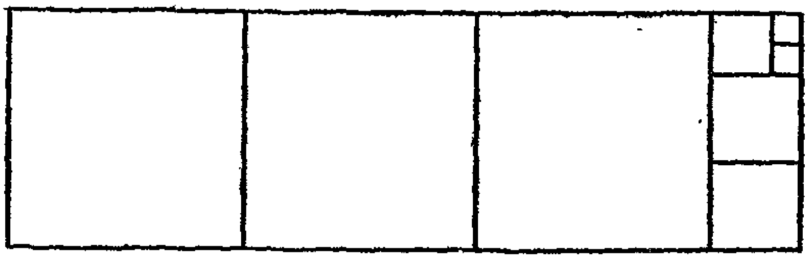


Рис. 3

5.7. Цепная дробь

Одним из применений алгоритма Евклида является представление дроби $\frac{a_1}{a_2}$ в виде

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{\ddots}{+ q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}},$$

где q_1 — целое число, а $q_2, q_3, \ldots, q_n$ — натуральные числа. Такое выражение называется *цепной* (*конечной непрерывной*) *дробью*. Докажите, что любую дробь $\frac{a_1}{a_2}$ можно разложить в цепную дробь, в которой числа $q_1, \ldots, q_n$ являются последовательными частными алгоритма Евклида для нахождения наибольшего общего делителя пары чисел a_1 и a_2.

5.8. Разложение в цепную дробь

Разложите следующую дробь в цепную дробь:

а) $\frac{7}{3}$; б) $\frac{84}{39}$; в) $\frac{33}{78}$.

5.9. Свертывание цепной дроби

Если в цепной дроби (см. задачу 5.7), начиная с конца, последовательно произвести указанные в ней операции по правилам действий с дробями, то в итоге получится обыкновенная дробь, разумеется, равная исходной.

Докажите, что полученная таким образом дробь будет несократимой. На основании этого утверждения сократите дробь $\frac{155}{93}$, разложив ее в цепную дробь, а затем свернув в обыкновенную.

5.10. Подходящие дроби

Пусть задана цепная дробь с последовательными частными $q_1, q_2, \ldots, q_n$ (см. задачу 5.7). Выражения

$$q_1,\ q_1+\frac{1}{q_2},\ q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3}},\ \ldots,\ q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cdots+\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}}$$

называются *подходящими дробями порядка* 1, 2, 3, ..., n соответственно. Разложите дробь $\frac{13}{29}$ в цепную дробь и выпишите все подходящие к ней дроби. Обратите каждую из подходящих дробей в обыкновенную.

5.11. Комбинирование сопротивлений

Из курса физики вам, наверняка, известно, что если соединить несколько сопротивлений $R_1, R_2, \ldots, R_k$ в электрической цепи последовательно (рис. 4), то общее сопротивление будет равно $R_1+R_2+\ldots+R_k$, а если соединить эти же сопротивления параллельно (рис. 5),

Рис. 4

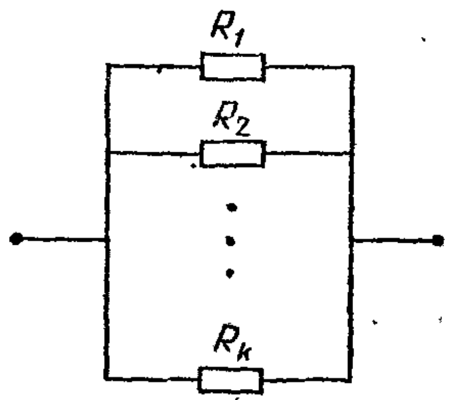


Рис. 5

то общее сопротивление окажется равным

$$\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\ldots+\frac{1}{R_k}}.$$

А теперь представьте, что у вас есть большое количество одинаковых единичных сопротивлений. Можно ли, комбинируя их в электрической цепи специальным образом, составить схему, имеющую сопротивление:

а) $\frac{7}{2}$; б) $\frac{10}{7}$; в) вообще $\frac{a}{b}$?

5.12. Кое-что о подходящих дробях

Пусть для заданной цепной дроби с последовательными частными $q_1, q_2, \ldots, q_n$ несократимые дроби

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots, \frac{P_n}{Q_n}$$

являются результатами свертывания подходящих дробей порядка 1, 2, ..., n соответственно (см. задачу 5.10). Докажите справедливость соотношений:

а) $P_1=q_1,\ Q_1=1,$

$P_2=q_1q_2+1,\ Q_2=q_2,$

$P_k=P_{k-1}q_k+P_{k-2},\ Q_k=Q_{k-1}q_k+Q_{k-2},\ k=3, \ldots, n;$

б) $\dfrac{P_k}{Q_k}-\dfrac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}=\dfrac{(-1)^k}{Q_kQ_{k-1}},\quad k=2, \ldots, n.$

5.13. Приближение цепной дроби

Между двумя параллельными осями вращения требуется так установить зубчатую передачу, чтобы отношение угловых скоростей вращения было по возможности более близким к числу $\frac{355}{113}$. Один из способов состоит в том, чтобы получить точное значение указанного отношения, поместив на одной оси шестеренку с 355 зубьями, а на другой — со 113 зубьями. Нельзя ли подобрать две шестеренки, имеющие меньше 25 зубьев каждая, обеспечив при этом абсолютную погрешность, не превышающую 0,002?

Решения

5.1. а) Так как $36=2^2\times3^2$ и $20=2^2\times5$, то $(36, 20)=2^2=4$.

б) Так как $1365=3\times5\times7\times13$ и $1225=5^2\times7^2$, то $(1365, 1225)=5\times7=35$.

в) Так как $1189=29\times41$ и $589=19\times31$, то $(1189, 589)=1$.

5.2. Докажем, что все общие делители пары чисел a и b являются общими делителями пары чисел b и r и, наоборот, все общие делители пары чисел b и r являются общими делителями пары чисел a и b. Тогда и наибольшие общие делители обеих пар будут совпадать.

Пусть d — какой-нибудь общий делитель чисел a и b. Так как $a=qb+r$, то число $r=a-qb$ также делится на d (ибо оно есть разность чисел a и qb, кратных d). Поэтому число d является общим делителем чисел b и r. Аналогично, если числа b и r имеют общий делитель d, то тот же делитель будет иметь и число $a=qb+r$, т. е. число d будет общим делителем чисел a и b.

В случае $r=0$ получаем, что наибольший общий делитель пары чисел a и b равен наибольшему делителю числа b (не равного нулю), т. е. самому числу b.

5.3. Заметим, что остаток от деления любого числа на число a обязательно меньше самого числа a. Поэтому последовательность ненулевых остатков удовлетворяет неравенствам

$$a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > \ldots > 0$$

и не может быть бесконечной, так как она содержит не более a_2 чисел. Следовательно, описанный алгоритм не может продолжаться бесконечно. Если же число a_n разделится на a_{n+1} нацело, то, согласно результату задачи 5.2, будут выполнены равенства

$$(a_1, a_2) = (a_2, a_3) = (a_3, a_4) = \ldots = (a_n, a_{n+1}) = a_{n+1},$$

т. е. наибольший общий делитель пары чисел a_1 и a_2 будет равен a_{n+1}.

5.4. а) Так как

$$36 = 1\times20+16, \quad 20 = 1\times16+4, \quad 16 = 4\times4,$$

то $(36, 20)=4$.

б) Так как

$$1365 = 1\times1225+140, \quad 1225 = 8\times140+105, \quad 140 = 1\times105+35, \quad 105 = 3\times35,$$

то $(1365, 1225)=35$.

в) Так как

$$1189 = 2\times589+11, \quad 589 = 53\times11+6, \quad 11 = 1\times6+5, \quad 6 = 1\times5+1, \quad 5 = 1\times5,$$

то $(1189, 589)=1$.

5.5. Найдем наибольший общий делитель пары чисел, стоящих в числителе и знаменателе дроби, и сократим дробь на этот делитель.

а) Воспользуемся алгоритмом Евклида:

$$2147 = 1\times1577+570, \qquad 437 = 3\times133+38,$$
$$1577 = 2\times570+437, \qquad 133 = 3\times38+19,$$
$$570 = 1\times437+133, \qquad 38 = 2\times19,$$

откуда $(2147, 1577)=19$. Произведя деление числителя и знаменателя дроби на 19, находим

$$\frac{2147}{1577}=\frac{113\times 19}{87\times 19}=\frac{113}{87}.$$

б) Заметим вначале, что числитель и знаменатель исходной дроби делятся на 6, поэтому ее можно сократить на 6 и получить дробь $\frac{221}{2023}$. Теперь применим алгоритм Евклида:

$$2023=9\times 221+34,\quad 221=6\times 34+17,\quad 34=2\times 17.$$

Таким образом, $(2023, 221)=17$ и дробь можно сократить еще на 17:

$$\frac{221}{2023}=\frac{13\times 17}{119\times 17}=\frac{13}{119}.$$

5.6. Из прямоугольника размером 135×40 сначала вырезаны квадраты со стороной, равной меньшей стороне этого прямоугольника, т. е. 40. Количество таких квадратов равно частному от деления 135 на 40 с остатком:

$$135=3\times 40+15.$$

Из оставшегося прямоугольника размером 40×15 вырезаны квадраты со стороной 15, которых, согласно делению 40 на 15 с остатком

$$40=2\times 15+10,$$

можно вырезать два. Из оставшегося прямоугольника размером 15×10 вырезан один квадрат со стороной 10, что соответствует делению 15 на 10 с остатком:

$$15=1\times 10+5.$$

Наконец, последний прямоугольник размером 10×5 разрезан на два квадрата со стороной 5, так как

$$10=2\times 5.$$

Как показывает приведенный анализ, рассмотренный способ разрезания на квадраты прямоугольника размером $a_1\times a_2$, по существу, является демонстрацией алгоритма Евклида нахождения наибольшего общего делителя пары чисел $a_1=135$ и $a_2=40$. Вообще прямоугольник размером $a_1\times a_2$ можно разрезать на квадраты со сторонами a_2, a_3, a_4, . . ., a_{n+1} в полном согласии с формулами алгоритма Евклида (см. задачу 5.3), причем последовательные частные q_1, q_2, . . ., q_n укажут количества соответствующих квадратов.

5.7. Цепочку равенств, получающихся при нахождении наибольшего общего делителя пары чисел a_1 и a_2 с помощью алгоритма Евклида (см. задачу 5.3), перепишем следующим образом:

$$\frac{a_1}{a_2}=q_1+\frac{a_3}{a_2}=q_1+\cfrac{1}{\cfrac{a_2}{a_3}},$$

$$\frac{a_2}{a_3}=q_2+\frac{a_4}{a_3}=q_2+\cfrac{1}{\cfrac{a_3}{a_4}},$$

$$\frac{a_3}{a_4}=q_3+\frac{a_5}{a_4}=q_3+\cfrac{1}{\cfrac{a_4}{a_5}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{a_{n-1}}{a_n}=q_{n-1}+\frac{a_{n+1}}{a_n}=q_{n-1}+\cfrac{1}{\cfrac{a_n}{a_{n+1}}},$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=q_n.$$

Подставляя в первую строчку вместо дроби $\frac{a_2}{a_3}$ ее выражение из второй строчки, находим

$$\frac{a_1}{a_2}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{\cfrac{a_3}{a_4}}}.$$

Подставляя сюда вместо дроби $\frac{a_3}{a_4}$ ее выражение из третьей строчки, имеем

$$\frac{a_1}{a_2}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cfrac{1}{\cfrac{a_4}{a_5}}}}.$$

Производя аналогичные подстановки и далее, из предпоследней строчки получим равенство

$$\frac{a_1}{a_2}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cfrac{\ddots}{\quad+\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{\cfrac{a_n}{a_{n+1}}}}}}},$$

в котором останется лишь подставить вместо дроби $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ ее значение q_n из последней строчки, после чего выражение будет удовлетворять всем требованиям задачи: все числа $q_2, q_3, \ldots, q_n$ являются натуральными, так как $a_2>a_3>\ldots>a_{n-1}>a_n>a_{n+1}$, а число q_1 является целым (если $a_1\geqslant a_2$, то натуральным, а если $a_1<a_2$, то нулевым).

5.8. а) $\frac{7}{3}=2+\frac{1}{3}$;

б) $\frac{84}{39}=2+\frac{6}{39}=2+\frac{1}{\frac{39}{6}}=2+\frac{1}{6+\frac{3}{6}}=2+\frac{1}{6+\frac{1}{2}}$;

в) $\frac{33}{78}=0+\frac{1}{\frac{78}{33}}=\frac{1}{2+\frac{12}{33}}=\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{11}{4}}}=$

$$=\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{3}{4}}}=\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{4}{3}}}}=\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}}.$$

5.9. Последовательные операции по свертыванию цепной дроби сводятся к операциям двух типов: сложение $q+\frac{a}{b}$ и деление $\frac{1}{\frac{a}{b}}$. Докажем, что если $\frac{a}{b}$ — несократимая дробь, то в результате операции любого из указанных двух типов получается также несократимая дробь. Действительно, операция первого типа приводит к дроби $\frac{qb+a}{b}$, числитель и знаменатель которой не имеют общих делителей, поскольку (см. решение задачи 5.2) справедливы равенства $(qb+a, b)=(b, a)=1$. Операция второго типа приводит к дроби $\frac{b}{a}$, которая также несократима, ибо $(a, b)=(b, a)=1$. Таким образом, раз дробь $\frac{1}{q_n}$ несократима, то на каждом шагу, в том числе и на последнем, при свертывании цепной дроби мы получаем несократимую дробь.

Например, для заданной в задаче сократимой дроби имеем

$$\frac{155}{93}=1+\frac{1}{\frac{93}{62}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{62}{31}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{\frac{3}{2}}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}.$$

5.10. Для дроби

$$\frac{13}{29}=0+\frac{1}{\frac{29}{13}}=\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{13}{3}}}=\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{3}}}$$

имеем следующие подходящие дроби:

$$0=\frac{0}{1},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{2+\frac{1}{4}}=\frac{4}{9},\quad \frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{3}}}=\frac{13}{29}.$$

5.11. Решение этой задачи может показаться на первый взгляд совсем очевидным, поскольку для любой дроби $\frac{a}{b}$ можно сначала соединить параллельно b единичных сопротивлений, получив сопротивление, равное $\frac{1}{b}$, а затем

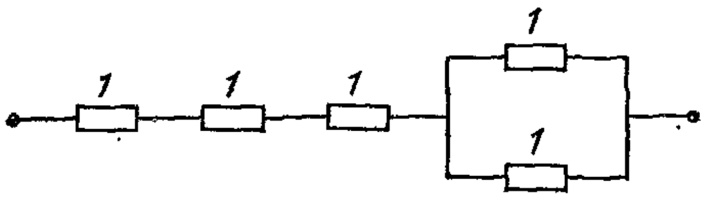


Рис. 6

размножить эту схему в a экземплярах, соединив их последовательно. При этом в конечном счете нам понадобится $a\times b$ единичных сопротивлений. Например, для такого решения п. а) их нужно $7\times 2=14$ штук, а для решения п. б) — $10\times 7=70$ штук. Как показывает приводимое ниже решение, этот очевидный способ далеко не самый экономный: в п. а) достаточно иметь всего 5, а в п. б) — 6 сопротивлений.

а) Соединив параллельно два единичных сопротивления, получим сопротивление $\frac{1}{2}$. Присоединив к нему последовательно еще три единичных сопротивления, мы получим сопротивление $3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$ (рис. 6).

б) С учетом разложения $\frac{10}{7}=1+\frac{1}{\frac{7}{3}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}$ требуемое сопротивление можно получить следующим образом: соединим последовательно одно единичное сопротивление и блок, в котором параллельно соединены три сопротивления — два единичных и блок из трех последовательных единичных сопротивлений (рис. 7). Тогда сопротивление второго блока будет равно 3, а первого — будет равно $\dfrac{1}{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2+\frac{1}{3}}$. Общее же сопротивление как раз и будет составлять $\dfrac{10}{7}$.

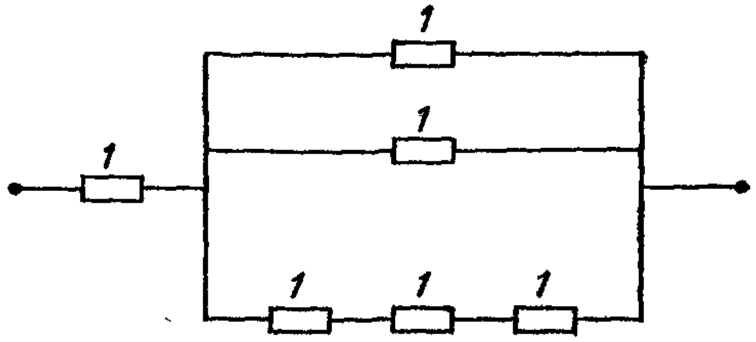


Рис. 7

в) Пусть дробь $\frac{a}{b}$ разложена в цепную дробь (см. задачу 5.7)

$$q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cdots+\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}}.$$

Тогда соединим последовательно q_1 единичных сопротивлений и первый блок, в котором соединим параллельно q_2 единичных сопротивлений и второй блок, в котором соединим последовательно q_3 единичных сопротивлений и третий блок и т. д. Так, чередуя последовательное и параллельное соединения при составлении каждого последующего блока, мы на предпоследнем шаге соединим последовательно или параллельно q_{n-1} единичных сопротивлений и $(n-1)$-й блок, в котором соединим, наоборот, параллельно или последовательно q_n единичных сопротивлений. Всего нам понадобится $q_1+q_2+\ldots+q_n$ сопротивлений, что, как правило, меньше, чем $a\times b$.

Докажем, что полученная схема имеет сопротивление $\frac{a}{b}$. Если мы временно отсоединим от цепи весь первый блок, то сопротивление будет равно q_1, т. е. первой подходящей дроби к данной цепной дроби. Если временно отсоединим от цепи не первый, а второй блок, то сопротивление неполного первого блока будет равно $\frac{1}{q_2}$ и общее сопротивление будет равно $q_1+\frac{1}{q_2}$, т. е. второй подходящей дроби. Если отсоединим от цепи не второй, а третий блок, то сопротивление неполного второго блока будет равно q_3, первого —

$$\frac{1}{\underbrace{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{1}}_{q_2 \text{ дробей}}+\frac{1}{q_3}}=\frac{1}{q_2+\frac{1}{q_3}}$$

и общее сопротивление будет равно третьей подходящей дроби. Продолжая эти рассуждения до конца, мы придем к тому, что если отсоединить только $(n-1)$-й блок, то общее сопротивление будет равно $(n-1)$-й подходящей дроби. Наконец, если ничего не отсоединять, то общее сопротивление будет равно последней подходящей дроби, т. е. самой цепной дроби, равной $\frac{a}{b}$.

5.12. а) Так как $q_1=\frac{q_1}{1}$ — несократимая дробь, то $P_1=q_1$, $Q_1=1$. Так как $q_1+\frac{1}{q_2}=\frac{q_1q_2+1}{q_2}$ — несократимая дробь, то $P_2=q_1q_2+1$, $Q_2=q_2$. Для $k=3$ получаем

$$\frac{P_3}{Q_3}=q_1+\frac{1}{q_2+\frac{1}{q_3}}=\frac{q_1\left(q_2+\frac{1}{q_3}\right)+1}{q_2+\frac{1}{q_3}}=\frac{P_2+\frac{P_1}{q_3}}{Q_2+\frac{Q_1}{q_3}}=\frac{P_2q_3+P_1}{Q_2q_3+Q_1},$$

откуда имеем $P_3=P_2q_3+P_1$, $Q_3=Q_2q_3+Q_1$, т. е. при $k=3$ формулы справедливы. Пусть они уже доказаны для значения $k-1$:

$$P_{k-1}=P_{k-2}q_{k-1}+P_{k-3},\quad Q_{k-1}=Q_{k-2}q_{k-1}+Q_{k-3}.$$

Тогда, заменяя q_{k-1} выражением $q_{k-1}+\frac{1}{q_k}$, мы из дроби $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ получим k-ю подходящую дробь

$$\frac{P_k}{Q_k}=\frac{P_{k-2}\left(q_{k-1}+\frac{1}{q_k}\right)+P_{k-3}}{Q_{k-2}\left(q_{k-1}+\frac{1}{q_k}\right)+Q_{k-3}}=\frac{P_{k-1}+\frac{1}{q_k}P_{k-2}}{Q_{k-1}+\frac{1}{q_k}Q_{k-2}}=$$

$$=\frac{P_{k-1}q_k+P_{k-2}}{Q_{k-1}q_k+Q_{k-2}},$$

откуда имеем $P_k=P_{k-1}q_k+P_{k-2}$, $Q_k=Q_{k-1}q_k+Q_{k-2}$, т.е. формулы справедливы и для значения k (несократимость каждой из дробей $\frac{P_k}{Q_k}$ была доказана в решении задачи 5.9).

б) В силу формул п. а) при $k=2, \ldots, n$ имеем

$$\begin{aligned}
&P_kQ_{k-1}-P_{k-1}Q_k=\\
&\quad=(P_{k-1}q_k+P_{k-2})Q_{k-1}-P_{k-1}(Q_{k-1}q_k+Q_{k-2})=\\
&=-(P_{k-1}Q_{k-2}-P_{k-2}Q_{k-1})=(-1)^2(P_{k-2}Q_{k-3}-P_{k-3}Q_{k-2})=\\
&=\ldots=(-1)^{k-1}(P_2Q_1-P_1Q_2)=(-1)^k(q_1q_2+1-q_1q_2)=(-1)^k.
\end{aligned}$$

Поэтому для любого значения $k=2, \ldots, n$ получаем

$$\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}=\frac{P_kQ_{k-1}-P_{k-1}Q_k}{Q_kQ_{k-1}}=\frac{(-1)^k}{Q_kQ_{k-1}},$$

что и требовалось доказать.

5.13. Если бы мы захотели приблизить данную дробь $\frac{355}{113}=3{,}14159\ldots$ десятичной дробью $\frac{a}{10^k}$, то для достижения заданной точности потребовалось бы подобрать значения a и k из неравенства $\left|3{,}14159\ldots-\frac{a}{10^k}\right|<0{,}002$. Проверка дробей $\frac{314}{100}=\frac{157}{50}$, $\frac{3142}{1000}=\frac{1571}{500}$, $\frac{31\,416}{10\,000}=\frac{3927}{1250}$ показывает их непригодность и убеждает нас в том, что такой перебор значений весьма затруднителен, да и вряд ли приведет к успеху.

Попробуем приблизить данную дробь с помощью подходящих дробей к цепной дроби

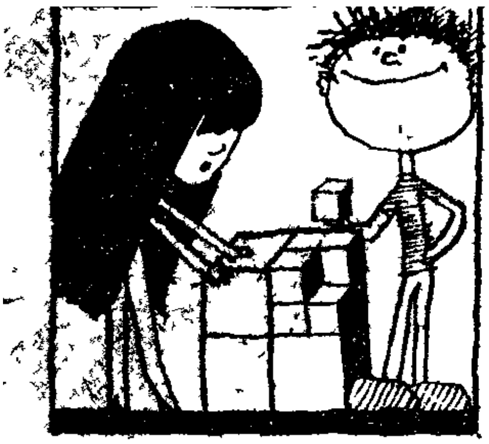
$$\frac{355}{113}=3+\frac{1}{\frac{113}{16}}=3+\frac{1}{7+\frac{1}{16}}.$$

Первая подходящая дробь $\frac{3}{1}$ дает погрешность $\frac{355}{113}-3=\frac{16}{113}>0{,}002$, а значит, не годится. Зато вторая подходящая дробь, равная $\frac{22}{7}$, отличается от третьей, равной исходной дроби, на величину

$$\left|\frac{355}{113}-\frac{22}{7}\right|=\left|\frac{-1}{113\times7}\right|=\frac{1}{791}<0{,}002$$

(см. соотношение п. б) задачи 5.12 при $k=3$). Таким образом, шестеренки с 22 и 7 зубьями удовлетворяют всем условиям задачи.

§ 6. ПО СЛЕДАМ ДИОФАНТА



Самые разные задачи практического содержания часто приводят к уравнениям, в которых неизвестные по своему смыслу могут принимать только целочисленные значения. Уравнения в целых числах рассматривались еще в глубокой древности. Особенно много ими занимался александрийский математик Диофант, имя которого и носят уравнения в целых числах.

Простейшим примером диофантова уравнения служит линейное уравнение

$$ax+by=c$$

в целых числах (естественно, с целыми коэффициентами a, b и c). Оно может быть решено разными способами. Но, пожалуй, наиболее универсальный способ тесно связан, как это ни странно, с алгоритмом Евклида и цепными дробями (см. § 5).

6.1. Без сдачи

Докажите, что любую денежную сумму, выраженную целым числом рублей, бо́льшим 7, можно уплатить без сдачи, имея лишь трехрублевые и пятирублевые купюры в достаточном количестве.

6.2. Оплата покупки

Докажите, что за любую покупку стоимостью в целое число рублей можно заплатить одними трехрублевыми купюрами, если у кассира имеются только пятирублевые купюры. Какое наименьшее количество пятирублевых купюр достаточно при этом иметь кассиру?

6.3. Необходимое условие разрешимости

Пусть a, b, c — ненулевые целые числа. Докажите, что если число c не делится на наибольший общий делитель пары чисел a и b, то уравнение $ax+by=c$ в целых числах не имеет решений.

6.4. Сорока купюрами

Можно ли набрать сумму в 1000 рублей с помощью купюр достоинством в 1 рубль, 10 рублей, 100 рублей таким образом, чтобы всего было использовано ровно 40 купюр?

6.5. Затруднение кладовщика

На складе имеются гвозди, упакованные в ящики по 16 кг, 17 кг и 40 кг. Может ли кладовщик отпустить 140 кг гвоздей, не вскрывая ни одного ящика?

6.6. Линейные диофантовы уравнения

Покажите, как свести решение уравнения

$$ax+by=c$$

в целых числах с ненулевыми целыми коэффициентами a, b, c к решению уравнения

$$a'x+b'y=c'$$

в целых числах, коэффициенты a', b', c' которого являются натуральными числами, причем числа a' и b' взаимно просты.

6.7. Состав с углем

На станцию привезли 420 т угля в вагонах вместимостью по 15 т, по 20 т и по 25 т. Сколько каких вагонов было использовано, если известно, что всего было 27 вагонов?

6.8. Общее решение

Пусть пара чисел $x=x_0$, $y=y_0$ удовлетворяет уравнению

$$ax+by=c$$

в целых числах с взаимно простыми коэффициентами a и b. Докажите, что формулы

$$x=x_0+bk, \qquad y=y_0-ak$$

с целым параметром k задают все решения этого уравнения.

6.9. Сколько нужно мешков?

Для перевозки зерна имеются мешки, в которые входит либо 60 кг, либо 80 кг зерна. Сколько надо заготовить тех и других мешков для загрузки 1 т зерна таким образом, чтобы все мешки были полными? Какое наименьшее количество мешков при этом может понадобиться?

6.10. Сколько нужно банок?

Требуется разлить 20,5 литра сока в банки по 0,7 л и 0,9 л так, чтобы все банки оказались полными. Сколько каких банок надо заготовить? Какое наименьшее количество банок при этом может понадобиться?

6.11. Частное решение

Докажите, что уравнение

$$ax+by=c$$

с взаимно простыми коэффициентами a и b имеет решение

$$x_0=(-1)^n c Q_{n-1}, \quad y_0=(-1)^{n+1} c P_{n-1},$$

где $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ — предпоследняя подходящая дробь к цепной дроби, в которую раскладывается дробь $\frac{a}{b}$ (см. задачи 5.7, 5.10, 5.12).

6.12. Загрузка трехтонок

Для перевозки большого количества контейнеров по 170 кг и по 190 кг выделены трехтонные машины. Можно ли ими загружать машины полностью?

6.13. Целые точки на прямой

Сколько точек с целочисленными координатами, удовлетворяющими неравенствам $x<0$ и $y>0$, лежит на прямой

$$8x-13y+11=0?$$

6.14. Наименьшим числом

У продавца имеются 100-граммовые гирьки и консервные банки весом по 450 г. Как с их помощью отвесить на чашечных весах 2,5 кг сахарного песка за один раз, используя для взвешивания наименьшее количество гирек и банок в общей сложности?

Решения

6.1. Пусть нужно уплатить денежную сумму в n рублей. Если число n делится на 3, то эту сумму можно уплатить одними трехрублевыми купюрами. Если остаток от деления числа $n>7$ на 3 равен 1, то

$$n=3q+1=3(q-3)+10,$$

причем $3q+1>7$, откуда $q>2$ и, значит, в этом случае сумму можно уплатить $q-3$ трехрублевыми купюрами и двумя пятирублевыми. Если же остаток от деления числа $n>7$ на 3 равен 2, то

$$n=3q+2=3(q-1)+5,$$

причем $3q+2>7$, откуда $q>1$ и, значит, в этом случае сумму можно уплатить $q-1$ трехрублевыми купюрами и 1 пятирублевой.

6.2. Если у кассира нет ни одной пятирублевой купюры, то покупатель может заплатить за покупку стоимостью в n рублей только при условии, что число n кратно 3. Если у кассира есть 1 пятирублевая купюра, то покупатель может заплатить за покупку только при условии, что число n либо кратно 3, либо дает остаток 1 при делении на 3 (в последнем случае покупатель платит на 5 рублей больше и получает 5 рублей сдачи: $n=3q+1=3(q+2)-5$). Наконец, если кассир имеет 2 пятирублевые купюры, то покупатель может заплатить за покупку при любом значении n (в случае, когда остаток от деления числа n на 3 равен 2, покупатель может заплатить на 10 рублей больше и получить 10 рублей сдачи:

$$n=3q+2=3(q+4)-10).$$

Таким образом, в условиях задачи кассир должен иметь минимум 2 пятирублевые купюры.

6.3. Пусть $(a, b)=d$ и число c не делится на d. Тогда если уравнение $ax+by=c$ имеет целочисленное решение $x=x_0$, $y=y_0$, то справедливо числовое равенство $ax_0+by_0=c$, в котором левая часть делится на d (ибо числа a и b кратны d), а правая нет. Полученное противоречие доказывает, что указанное уравнение в целых числах не может иметь решений.

6.4. Если сумму в 1000 рублей можно набрать с помощью x, y и z купюр достоинством в 1 рубль, 10 рублей и 100 рублей соответственно, то справедливо равенство $x+10y+100z=1000$. Если к тому же всего купюр должно быть $x+y+z=40$, то целые числа x и y должны удовлетворять уравнению $(40-y-z)+10y+100z=1000$, или $9y+$ $+99z=960$. Согласно утверждению задачи 6.3, последнее уравнение в целых числах не имеет решений, так как число 960 не делится на наибольший общий делитель пары чисел 9 и 99, равный 9.

6.5. Задача сводится к решению уравнения

$$16x+17y+40z=140$$

в целых неотрицательных числах. Заметим, что число y

не может быть равным 0, так как иначе уравнение

$$16x+40z=140$$

в целых числах имело бы решение, что противоречило бы утверждению задачи 6.3 (ибо число 140 не делится на число $(16, 40)=8$). Далее, число x также не может быть равным 0, так как иначе было бы выполнено равенство $17y=140-40z=10(14-4z)$ и неотрицательное число $14-4z$ делилось бы на 17 при целом неотрицательном значении z, что невозможно. Наконец, число z также не может быть равным 0, так как иначе из равенства $17y=140-16x=4(35-4x)$ следовало бы, что число $35-4x$ кратно 17 при $x>0$, что невозможно.

Таким образом, числа x, y, z должны быть положительными, а числа $x'=x-1$, $y'=y-1$, $z'=z-1$ — целыми неотрицательными, удовлетворяющими уравнению

$$16x'+17y'+40z'=67.$$

Аналогичные рассуждения показывают, что $y'\neq 0$ и $x'\neq 0$, т. е. числа $x''=x'-1$ и $y''=y'-1$ должны удовлетворять уравнению

$$16x''+17y''+40z'=34,$$

в целых неотрицательных числах, которое имеет единственное решение $x''=0$, $y''=2$, $z'=0$. Таким образом, возвращаясь к исходным неизвестным, мы получаем единственное решение первоначального уравнения $x=2$, $y=4$, $z=1$, т. е. 140 кг гвоздей можно отпустить только с помощью 2 ящиков по 16 кг, 4 ящиков по 17 кг и 1 ящика в 40 кг.

6.6. Если в правой части уравнения

$$ax+by=c$$

стоит отрицательное число, то умножим обе части уравнения на -1 и получим уравнение с положительным числом в правой части. Будем считать, что эта операция уже произведена с самого начала. Если коэффициент a отрицателен, то заменим неизвестную x неизвестной $x'=-x$ и получим уравнение

$$-ax'+by=c$$

с положительным коэффициентом $-a$. Аналогично, если $b<0$, то замена $y'=-y$ приводит к уравнению

$$ax-by'=c$$

с положительным коэффициентом $-b$. Поэтому каждый из коэффициентов a и b соответствующей заменой неизвестной можно сделать положительным. Будем считать, что это уже сделано. Если числа a и b не являются взаимно простыми, то наибольший общий делитель $(a, b)=d$ чисел a и b должен быть делителем числа c (иначе в силу утверждения задачи 6.3 уравнение в целых числах не будет иметь решений). Поэтому имеем $a=a'd$, $b=b'd$, $c=c'd$ и, поделив обе части уравнения на d, получаем уравнение

$$a'x+b'y=c'$$

с взаимно простыми коэффициентами a' и b'.

6.7. Пусть было использовано x, y и z вагонов вместимостью по 15 т, по 20 т и по 25 т соответственно. Тогда имеем

$$15x+20y+25z=420, \quad x+y+z=27,$$

т. е. числа y и z должны удовлетворять уравнению

$$15(27-y-z)+20y+25z=420$$

в натуральных числах. Преобразовывая это уравнение, получаем

$$y+2z=3,$$

т. е. $y=z=1$ и $x=25$. Итак, было использовано 25 вагонов по 15 т, 1 вагон в 20 т и 1 вагон в 25 т.

6.8. Если пара чисел x, y наряду с парой чисел x_0, y_0 удовлетворяет уравнению

$$ax+by=c$$

в целых числах с взаимно простыми коэффициентами a и b, то имеем $ax+by=c=ax_0+by_0$, откуда $a(x-x_0)+$ $+b(y-y_0)=0$. Так как число $x-x_0=\frac{b(y_0-y)}{a}$ является целым, а числа b и a не имеют общих делителей, то число $k=\frac{y_0-y}{a}$ также является целым. Поэтому $x-x_0=bk$ и $y-y_0=ak$, откуда получаем равенства

$$x=x_0+bk, \quad y=y_0-ak.$$

Мы доказали, что любое решение уравнения задается указанными формулами. С другой стороны, при любом целом значении k имеем

$$a(x_0+bk)+b(y_0-ak)=ax_0+by_0=c,$$

т. е. ничего кроме решений эти формулы не задают.

6.9. Для неизвестных x и y, обозначающих количество мешков по 60 и по 80 кг соответственно, имеем уравнение

$$60x+80y=1000,$$

или уравнение

$$3x+4y=50$$

в целых неотрицательных числах. Одно целочисленное решение этого уравнения нетрудно угадать, воспользовавшись равенством

$$-3\times 50+4\times 50=50.$$

Учитывая формулы общего решения (см. задачу 6.8), получаем все целочисленные решения этого уравнения:

$$x=-50+4k, \quad y=50-3k.$$

Теперь для того, чтобы найти все натуральные решения, наложим ограничения

$$4k-50\geqslant 0, \qquad 50-3k\geqslant 0,$$

из которых выведем оценки

$$12<\frac{50}{4}\leqslant k\leqslant\frac{50}{3}<17.$$

Таким образом, полагая последовательно $k=13, 14, 15, 16$, найдем все неотрицательные решения:

$$x_1=2, \quad y_1=11; \quad x_2=6, \quad y_2=8; \quad x_3=10, \quad y_3=5;$$
$$x_4=14, \quad y_4=2.$$

Наименьшее количество мешков $x+y=13$ достигается при первом из найденных решений.

6.10. Задача сводится к решению уравнения

$$0{,}7x+0{,}9y=20{,}5$$

в целых неотрицательных числах (x и y — количество банок по 0,7 и 0,9 л соответственно). Преобразуем уравнение к виду

$$7x+9y=205,$$

а затем, делая последовательные замены переменных в левой части, получим равенства

$$7x+9y=7(x+y)+2y=7u+2y=u+2(y+3u)=u+2v=205,$$

где $x+y=u$, $y+3u=v$. Из этих равенств имеем

$$u=205-2v,$$
$$y=v-3u=v-3(205-2v)=7v-615\geqslant 0,$$
$$x=u-y=205-2v-(7v-615)=820-9v\geqslant 0,$$
$$87<\frac{615}{7}\leqslant v\leqslant\frac{820}{9}<92.$$

Подставляя $v=88$, 89, 90, 91, получаем четыре решения:

$$x_1=28,\ y_1=1;\quad x_2=19,\ y_2=8;\quad x_3=10,\ y_3=15;$$
$$x_4=1,\ y_4=22.$$

Наименьшая сумма $x+y=23$ достигается при последнем решении, которое, следовательно, требует наименьшего количества банок.

6.11. Из равенства, сформулированного в п. б) задачи 5.12, при $k=n$ получаем

$$\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{(-1)^n}{Q_nQ_{n-1}},$$

где $\frac{P_n}{Q_n}=\frac{a}{b}$ — последняя подходящая дробь к цепной дроби, в которую раскладывается дробь $\frac{a}{b}$. Так как дроби $\frac{P_n}{Q_n}$ и $\frac{a}{b}$ несократимы (см. задачу 5.9), то $P_n=a$, $Q_n=b$ и

$$aQ_{n-1}-bP_{n-1}=(-1)^n.$$

Умножая обе части последнего равенства на $(-1)^n$, имеем

$$a((-1)^n cQ_{n-1})+b((-1)^{n+1}cP_{n-1})=c,$$

т. е. пара чисел $x_0=(-1)^n cQ_{n-1}$, $y_0=(-1)^{n+1}cP_{n-1}$ является решением уравнения $ax+by=c$.

6.12. Обозначая через x и y количества контейнеров по 170 и 190 кг соответственно, получаем после сокращения на 10 уравнение

$$17x+19y=300$$

в целых неотрицательных числах. Для нахождения частного решения воспользуемся методом задачи 6.11, разложив дробь $\frac{17}{19}$ в цепную дробь

$$\frac{17}{19}=\frac{1}{1+\frac{2}{17}}=\frac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2}}}$$

(число n получилось равным 4) и свернув предпоследнюю подходящую к ней дробь в обыкновенную

$$\frac{1}{1+\frac{1}{8}}=\frac{8}{9}.$$

Итак, частное решение расходного уравнения имеет вид

$$x_0=(-1)^4 300\times 9=2700, \qquad y_0=(-1)^5 300\times 8=-2400,$$

а общее задается формулой

$$x=2700-19k, \qquad y=-2400+17k,$$

откуда получаем условия на параметр k

$$141<\frac{2400}{17}\leqslant k\leqslant\frac{2700}{19}<143,$$

т. е. $k=142$, $x=2$, $y=14$.

6.13. После замены переменной $x'=-x$ (см. задачу 6.6) получаем уравнение

$$8x'+13y=11$$

в натуральных числах, которое решим методами, предложенными в задачах 6.8 и 6.11: предпоследняя подходящая дробь к цепной дроби

$$\frac{8}{13}=\frac{1}{1+\frac{5}{8}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{8}{5}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}$$

равна

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}=\frac{3}{5},$$

откуда

$$x'=(-1)^6\times 11\times 5+13k=55+13k>0,$$
$$y=(-1)^7\times 11\times 3-8k=-33-8k>0,$$

т. е. $-5<-\frac{55}{13}<k<-\frac{33}{8}<-4$, что невозможно. Итак, на прямой $8x-13y+11=0$ нет ни одной точки с целочисленными координатами, удовлетворяющими условиям $x<0$ и $y>0$.

6.14. Так как гирьки и банки можно класть на любую чашку весов, то числа x и y (гирек и банок соответственно) удовлетворяют уравнению

$$100x+450y=2500$$

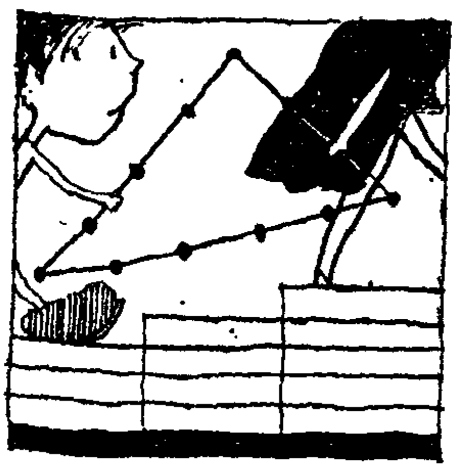
в целых числах (отрицательное значение какой-либо неизвестной означает, что соответствующие предметы лежат на одной чашке с сахарным песком). Приведем уравнение к виду

$$2x+9y=50$$

и заметим, что числа $y_0=0$, $x_0=25$ дают частное решение. Поэтому общее решение имеет вид (см. задачу 6.8)

$$x=25+9k, \qquad y=-2k.$$

Докажем, что наименьшее количество гирек и банок, требуемое для взвешивания, равно 8. Действительно, если гирьки и банки лежат на одной чашке весов, то $x\geqslant0$, $y\geqslant0$ и $-3<-\frac{25}{9}\leqslant k\leqslant0$, причем наименьшая сумма $x+y=$ $=25+7k=11$ достигается при $k=-2$. Если гирьки лежат на одной чашке весов, а банки и сахар на другой, то $x\geqslant0$, $y\leqslant0$ и $k\geqslant0$, причем наименьшая сумма $x+(-y)=25+$ $+11k=25$ достигается при $k=0$. Если же банки лежат на одной чашке весов, а гирьки и сахар на другой, то $x\leqslant0$, $y\geqslant0$ и $k\leqslant-\frac{25}{9}<-2$, причем наименьшая сумма $(-x)+y=$ $=-25-11k=8$ достигается при $k=-3$. Таким образом, продавец должен на одну чашку весов положить 6 банок, а на другую — 2 гирьки и взвешиваемый сахар. Весы уравновесятся, если сахара будет 2,5 кг.



§ 7. ПИФАГОРОВЫ ТРОЙКИ

Важный пример диофантова уравнения дает теорема Пифагора, связывающая длины x и y катетов прямоугольного треугольника с длиной z его гипотенузы:

$$x^2+y^2=z^2.$$

Вы, конечно, встречали одно из замечательных решений этого уравнения в натуральных числах, а именно пифагорову тройку чисел $x=3$, $y=4$, $z=5$. Есть ли еще такие тройки?

Оказывается пифагоровых троек бесконечно много и все они давным-давно найдены. Они могут быть получены по известным формулам, о которых вы узнаете из настоящего параграфа.

Если диофантовы уравнения первой и второй степени уже решены, то вопрос о решении уравнений более высоких степеней до сих пор остается открытым, несмотря на усилия крупнейших математиков. В настоящее время, например, еще окончательно не доказана и не опровергнута знаменитая гипотеза Ферма о том, что при любом целом значении $n>2$ уравнение

$$x^n+y^n=z^n$$

в целых числах не имеет решений.

Для решения некоторых типов диофантовых уравнений полезную роль могут сыграть так называемые *комплексные числа*. Что это такое? Пусть буквой i обозначен некий объект, удовлетворяющий условию $i^2=-1$ (понятно, что ни одно действительное число этому условию не удовлетворяет). Рассмотрим выражения вида $\alpha+i\beta$, где α и β — действительные числа. Такие выражения будем называть комплексными числами, определив над ними операции сложения и умножения, как и над двучленами, но с той лишь разницей, что выражение i^2 всюду будем заменять числом -1:

$$(\alpha+i\beta)+(\gamma+i\delta)=(\alpha+\gamma)+i(\beta+\delta),$$
$$(\alpha+i\beta)(\gamma+i\delta)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+i(\alpha\gamma+\beta\gamma).$$

7.1. Из одной тройки много

Докажите, что если x_0, y_0, z_0 — пифагорова тройка, то тройки y_0, x_0, z_0 и x_0k, y_0k, z_0k при любом значении натурального параметра k также являются пифагоровыми.

7.2. Частные формулы

Проверьте, что при любых натуральных значениях $m>n$ тройка вида

$$2mn,\quad m^2-n^2,\quad m^2+n^2$$

является пифагоровой. Всякую ли пифагорову тройку x, y, z можно представить в таком виде, если разрешить переставлять местами числа x и y в тройке?

7.3. Несократимые тройки

Пифагорову тройку чисел, не имеющих общего делителя, большего 1, будем называть несократимой. Докажите, что пифагорова тройка является несократимой только в случае, если любые два из чисел тройки являются взаимно простыми.

7.4. Свойство несократимых троек

Докажите, что в любой несократимой пифагоровой тройке x, y, z число z и ровно одно из чисел x или y являются нечетными.

7.5. Все несократимые тройки

Докажите, что тройка чисел x, y, z является несократимой пифагоровой тройкой тогда и только тогда, когда она с точностью до порядка первых двух чисел совпадает с тройкой $2mn$, m^2-n^2, m^2+n^2, где $m>n$ — взаимно простые натуральные числа разной четности.

7.6. Общие формулы

Докажите, что все решения уравнения

$$x^2+y^2=z^2$$

в натуральных числах задаются с точностью до порядка неизвестных x и y формулами

$$x=2mnk, \quad y=(m^2-n^2)k, \quad z=(m^2+n^2)k,$$

где $m>n$ и k — натуральные параметры (чтобы исключить дублирование каких-либо троек, достаточно выбирать числа m и n взаимно простыми и к тому же разной четности).

7.7. Первые 10 троек

Найдите все пифагоровы тройки x, y, z, удовлетворяющие условию $x<y<z<30$.

7.8. Свойства пифагоровых троек

Докажите, что для любой пифагоровой тройки x, y, z справедливы утверждения:

а) хотя бы одно из чисел x или y кратно 3;

б) хотя бы одно из чисел x или y кратно 4;

в) хотя бы одно из чисел x, y или z кратно 5.

7.9. Применение комплексных чисел

Модулем комплексного числа $\alpha+i\beta$ называется неотрицательное число

$$|\alpha+i\beta|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

Проверьте, что для любых комплексных чисел $\alpha+i\beta$ и $\gamma+i\delta$ выполняется свойство

$$|\alpha+i\beta|\,|\gamma+i\delta|=|(\alpha+i\beta)(\gamma+i\delta)|.$$

Пользуясь свойствами комплексных чисел и их модулей, докажите, что любые два целых числа m и n удовлетворяют равенству

$$(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2,$$

т. е. задают решение уравнения

$$x^2+y^2=z^2$$

в целых числах (сравните с задачей 7.5).

7.10. Непифагоровы тройки

Пользуясь свойствами комплексных чисел и их модулей (см. задачу 7.9), найдите формулы для каких-либо целочисленных решений уравнения:

а) $x^2+y^2=z^3$; б) $x^2+y^2=z^4$.

Решения

7.1. Если $x_0^2+y_0^2=z_0^2$, то $y_0^2+x_0^2=z_0^2$, и при любом натуральном значении k имеем

$$(x_0k)^2+(y_0k)^2=(x_0^2+y_0^2)k^2=z_0^2k^2=(z_0k)^2,$$

что и требовалось доказать.

7.2. Из равенств

$$(m^2+n^2)^2=m^4+2m^2n^2+n^4=(m^4-2m^2n^2+n^4)+4m^2n^2=$$
$$=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$$

заключаем, что указанная в задаче тройка удовлетворяет уравнению $x^2+y^2=z^2$ в натуральных числах. Однако не всякую пифагорову тройку x, y, z можно представить в таком виде; например, тройка 9, 12, 15 является пифагоровой, но число 15 не представимо в виде суммы квадратов каких-либо двух натуральных чисел m и n.

7.3. Если какие-то два числа из пифагоровой тройки x, y, z имеют общий делитель d, то он будет делителем и третьего числа (так, в случае $x=x_1d$, $y=y_1d$ имеем $z^2=$ $=x^2+y^2=(x_1^2+y_1^2)d^2$, откуда z^2 делится на d^2 и z делится на d). Поэтому для несократимости пифагоровой тройки необходимо, чтобы любые два из чисел тройки были взаимно простыми.

7.4. Заметим, что одно из чисел x или y, скажем x, несократимой пифагоровой тройки x, y, z является нечетным, так как в противном случае числа x и y не были бы взаимно простыми (см. задачу 7.3). Если при этом другое число y

также нечетно, то оба числа

$$x^2=(2a+1)^2=4a^2+4a+1 \quad \text{и} \quad y^2=(2b+1)^2=4b^2+4b+1$$

дают остаток 1 при делении на 4, а число $z^2=x^2+y^2$ дает при делении на 4 остаток 2, т. е. оно делится на 2, но не делится на 4, чего не может быть. Таким образом, число y должно быть четным, а число z, стало быть, нечетным.

7.5. Пусть пифагорова тройка x, y, z несократима и, для определенности, число x четно, а числа y, z нечетны (см. задачу 7.4). Тогда

$$x^2=z^2-y^2=(z+y)(z-y)=(2a)(2b),$$

где числа $a=\frac{z+y}{2}$, $b=\frac{z-y}{2}$ являются целыми. Докажем, что числа a и b взаимно просты. В самом деле, если бы они имели общий делитель, больший 1, то такой же делитель имели бы и числа $z=a+b$, $y=a-b$, т. е. тройка не была бы несократимой (см. задачу 7.3). Теперь, раскладывая числа a и b в произведения простых множителей, замечаем, что любой простой множитель должен входить в произведение $4ab=x^2$ только в четной степени, причем если он входит в разложение числа a, то не входит в разложение числа b и наоборот. Поэтому любой простой множитель входит в разложение числа a или b в отдельности только в четной степени, а, значит, сами эти числа являются квадратами целых чисел. Положим $m=\sqrt{a}$, $n=\sqrt{b}$, тогда получим равенства

$$x^2=4m^2n^2, \quad x=2mn,$$
$$z=a+b=m^2+n^2, \quad y=a-b=m^2-n^2,$$

причем натуральные параметры $m>n$ взаимно просты (вследствие взаимной простоты чисел a и b) и имеют разную четность (из-за нечетности числа $z=m^2+n^2$).

Пусть теперь натуральные числа $m>n$ разной четности являются взаимно простыми. Тогда тройка $x=2mn$, $y=m^2-n^2$, $z=m^2+n^2$, согласно утверждению задачи 7.2, является пифагоровой. Докажем, что она несократима. Для этого достаточно проверить, что числа y и z не имеют общих делителей (см. задачу 7.3). В самом деле, оба эти числа нечетны, так как числа m и n имеют разную четность. Если же числа y и z имеют какой-либо простой общий делитель (тогда уж обязательно нечетный), то такой же делитель имеет и каждое из чисел $m^2=\frac{z+y}{2}$ и

$n^2=\frac{z-y}{2}$, а с ними и каждое из чисел m и n, что противоречит их взаимной простоте.

7.6. В силу утверждений, сформулированных в задачах 7.1, 7.2, указанные формулы задают только пифагоровы тройки. С другой стороны, любая пифагорова тройка x, y, z после ее сокращения на наибольший общий делитель k пары чисел x и y становится несократимой (см. задачу 7.3) и, следовательно, может быть представлена с точностью до порядка чисел x и y в виде, описанном в задаче 7.5. Поэтому любая пифагорова тройка задается указанными формулами при некоторых значениях параметров.

7.7. Из неравенства $z<30$ и формул задачи 7.6 получаем оценку $m^2<30$, т. е. $m\leqslant5$. Полагая $m=2$, $n=1$ и $k=1$, 2, 3, 4, 5, получаем тройки 3, 4, 5; 6, 8, 10; 9, 12, 15; 12, 16, 20; 15, 20, 25. Полагая $m=3$, $n=2$ и $k=1$, 2, получаем тройки 5, 12, 13; 10, 24, 26. Полагая $m=4$, $n=1$, 3 и $k=1$, получаем тройки 8, 15, 17; 7, 24, 25. Наконец, полагая $m=5$, $n=2$ и $k=1$, получаем тройку 20, 21, 29.

7.8. Докажем справедливость утверждений задачи для любой несократимой тройки вида $2mn$, m^2-n^2, m^2+n^2, где $m>n$ — взаимно простые числа разной четности (см. задачу 7.5). Тогда после умножения чисел этой тройки на любое число k (см. задачу 7.6) те же утверждения о делимости останутся верными. Итак, если одно из чисел m или n кратно 3, то число $2mn$ также кратно 3; если же оба числа m и n не делятся на 3, то они дают либо одинаковые остатки при делении на 3 (тогда число $m-n$ кратно 3), либо разные (и тогда эти остатки равны 1 и 2, а число $m+n$ кратно 3), но в любом случае число $m^2-n^2=(m-n)\times$ $\times(m+n)$ делится на 3. Утверждение а) доказано. Утверждение б) вытекает из того, что числа m и n имеют разную четность, т. е. одно из них четно, а, значит, число $2mn$ кратно 4. Наконец, если одно из чисел m или n кратно 5, то число $2mn$ также кратно 5; если же оба числа m и n не делятся на 5, то квадрат любого из них дает либо остаток 1 при делении на 5, либо недостаток -1 (это следует из равенств

$$(5q\pm1)^2=25q^2\pm10q+1=5(5q^2\pm2q)+1,$$
$$(5q\pm2)^2=25q^2\pm20q+4=5(5q^2\pm4q+1)-1$$

и того факта, что любое число, не кратное 5, представляется в одном из видов $5q\pm1$ или $5q\pm2$), а это значит, что либо число m^2-n^2, либо число m^2+n^2 кратно 5. Поэтому утверждение в) также справедливо.

7.9. Справедливость свойства модулей, сформулированного в задаче, вытекает из тождества

$$(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)=(\alpha\gamma-\beta\delta)^2+(\alpha\delta+\beta\gamma)^2,$$

левая часть которого равна $(|\alpha+i\beta|\times|\gamma+i\delta|)^2$, а правая равна $(|\alpha+i\beta)(\gamma+i\delta)|)^2=(|(\alpha\gamma-\beta\delta)+i(\alpha\delta+\beta\gamma)|)^2$. Теперь, учитывая доказанное свойство, получаем

$$(m^2+n^2)^2=|m+in|^4=|(m+in)^2|^2=|m^2+2min+i^2n^2|^2=$$
$$=|(m^2-n^2)+i(2mn)|^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2,$$

что и требовалось доказать.

7.10. Будем искать неизвестную z в виде квадрата модуля некоторого комплексного числа. Тогда из равенств

$$(m^2+n^2)^3=|m+in|^6=|(m+in)^3|^2=$$
$$=|m^3+3m^2in+3mi^2n^2+i^3n^3|^2=$$
$$=|(m^3-3mn^2)+i(3m^2n-n^3)|^2=(m^3-3mn^2)^2+(3m^2n-n^3)^2$$

получаем серию решений уравнения а) с целыми параметрами m и n:

$$x=m^3-3mn^2,\ y=3m^2n-n^3,\ z=m^2+n^2.$$

Аналогично из равенств

$$(m^2+n^2)^4=|m+in|^8=|(m+in)^4|^2=$$
$$=|m^4+4m^3in+6m^2i^2n^2+4mi^3n^3+i^4n^4|^2=$$
$$=|(m^4-6m^2n^2+n^4)+i(4m^3n-4mn^3)|^2=$$
$$=(m^4-6m^2n^2+n^4)^2+(4m^3n-4mn^3)^2$$

получаем серию решений уравнения б) с целыми параметрами m и n:

$$x=m^4-6m^2n^2+n^4,\ y=4m^3n-4mn^3,\ z=m^2+n^2.$$

§ 8. РАСЧЕТЫ ПРИ СМЕШИВАНИИ

Довольно часто приходится смешивать различные жидкости, порошки, а иногда даже газообразные или твердые вещества, разбавлять что-либо водой или наблюдать испарение воды, т. е. усыхание. В задачах настоящего параграфа вам предстоит мысленно производить именно такие операции. Ниже всюду, если не оговорено противного, будем предполагать, что в результате перемешивания получается однородная масса. Это означает, что интересующая нас характеристика смеси одинакова для любой части смеси.

Одной из наиболее распространенных характеристик смеси является концентрация конкретной составляющей смеси, т. е. отношение количества этой составляющей к общему количеству смеси. При подсчете концентрации указанные количества могут измеряться как их весом (массой), так и объемом. В приведенных ниже задачах мы везде, где возникает разночтение в этом вопросе, будем брать для определенности весовые концентрации.

На практике концентрации принято выражать в сотых долях единицы, называемых процентами. Содержание какого-либо драгоценного металла в сплаве с примесями обычно называют пробой и обозначают числом тысячных долей единицы. Например, говоря о золоте 573-й пробы, мы подразумеваем, что в каждых 1000 г такого «золота» содержится только 573 г чистого золота.

В некоторых случаях нас будет интересовать не содержание одного вещества в другом, а, скажем, стоимость единицы смеси, удельный вес или давление (к которым применимы аналогичные рассуждения). Иногда же будет поставлен принципиальный вопрос о том, какого вещества в смеси больше или как добиться наибольшего его содержания.

8.1. Приготовление раствора

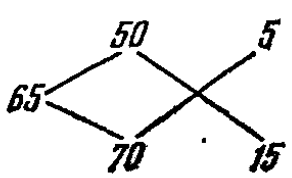
В каких количествах нужно смешать жидкость с ее растворителем, чтобы получить 100 г 20-процентного раствора этой жидкости?

8.2. Два раствора

В каких пропорциях нужно смешать раствор 50-процентной и раствор 70-процентной кислоты, чтобы получить раствор 65-процентной кислоты?

8.3. Старинный способ

Для решения задачи 8.2 нарисуем схему



в которой слева запишем требуемую концентрацию кислоты в процентах, т. е. 65, затем друг под другом запишем концентрации имеющихся растворов, т. е. 50 и 70, наконец, подсчитаем и запишем крест-накрест соответствующие разности 65—50=15 и 70—65=5. Теперь можно сделать вывод, что для получения 65-процентной кислоты нужно взять растворы 50-процентной и 70-процентной кислот в отношении 5 : 15, или, что то же, 1 : 3. Дайте обоснование приведенному способу.

8.4. Разные пробы золота

В каких пропорциях нужно сплавить золото 375-й пробы с золотом 750-й пробы, чтобы получить золото 500-й пробы?

8.5. Столовый уксус

Имеется 90 г 80-процентной уксусной эссенции. Какое наибольшее количество 9-процентного столового уксуса из нее можно получить?

8.6. Разбавление морской воды

Сколько пресной воды нужно добавить к 4 кг морской воды, чтобы уменьшить содержание соли в ней в 2,5 раза?

8.7. Смешивание чая

Индийский чай дороже грузинского в $\frac{5}{4}$ раза. В каких пропорциях нужно смешать индийский чай с грузинским, чтобы получить чай, который дороже грузинского в $\frac{6}{5}$ раза?

8.8. Выплавка металла

Руда содержит 40% примесей, а выплавляемый из нее металл содержит 4% примесей. Сколько металла получится из 24 т руды?

8.9. Неожиданное усыхание

В расколотом арбузе содержалось 99% воды. После его усыхания содержание воды стало составлять 98%. Сообразите в уме, во сколько раз усох арбуз. Не спешите с ответом: арбуз усох не в $\frac{99}{98}$ раза!

8.10. Сушка грибов

В свежих грибах содержится 90% воды. Определите, во сколько раз усыхают грибы в результате сушки, если во столько же раз в них уменьшается содержание воды.

8.11. Три раствора

В трех сосудах содержится по 100 г растворов кислоты: в первом 70-процентной, во втором 60-процентной, в третьем 30-процентной. Смешивая эти растворы, нужно получить 250 г раствора кислоты. Какую наибольшую и наименьшую концентрацию может иметь полученный раствор? Как получить 250 г 55-процентной кислоты?

8.12. Взвешивание в воде

Сплав из золота и серебра весом 13 кг 410 г при полном погружении в воду стал весить 12 кг 510 г. Определите количество золота и серебра в сплаве, если известно, что плотность золота равна 19,3 г/см^3, а серебра 10,5 г/см^3.

8.13. Чего больше?

В одном стакане налито некоторое количество черного кофе, а в другом — молока. Из первого стакана во второй перелили ложку кофе, а затем, не размешивая содержимое второго стакана, перелили из него в первый ложку жидкости. Чего в результате стало больше: молока в первом стакане или кофе во втором? Попробуйте решить задачу в уме.

8.14. Кофе с молоком

От полного стакана черного кофе я отпил половину и долил столько же молока. Затем я отпил третью часть получившегося кофе с молоком и долил столько же молока. Затем я отпил шестую часть получившегося кофе с молоком и долил столько же молока. Только после этого я выпил все до конца. Чего в итоге я выпил больше: молока или черного кофе?

8.15. С помощью переливаний

В первом стакане налито некоторое количество черного кофе, а во втором — такое же количество молока. Разрешается переливать из одного стакана в другой любое количество жидкости, тщательно размешивая содержимое стаканов. Можно ли с помощью нескольких таких переливаний добиться того, чтобы в первом стакане молока стало больше, чем кофе?

8.16. Как выгоднее полоскать?

Нужно прополоскать колбу, в которой находился жидкий реактив. Для этой цели отведено некоторое количество воды. В каком случае полоскание будет эффективнее: если влить в колбу всю воду сразу или если сначала прополоскать колбу половиной имеющейся воды, а затем второй половиной?

8.17. Отливая по одному литру

В кастрюле налито 10 л сиропа. Из нее отливают 1 л сиропа и доливают 1 л воды. Затем отливают 1 л смеси и снова доливают 1 л воды. Может ли сироп в результате нескольких таких операций оказаться разбавленным ровно в два раза?

8.18. Давление газа

В нескольких одинаковых баллонах находится сжатый газ под разными известными давлениями, причем самое слабое давление в первом баллоне. Разрешается подсоединять первый баллон поочередно к любому из остальных баллонов, но не более чем по одному разу. При соединении двух баллонов давление в них обоих становится равным среднему арифметическому их исходных давлений. К каким баллонам и в какой последовательности следует подсоединять первый баллон, чтобы создать в нем наибольшее давление?

Решения

8.1. В 100 г 20-процентного раствора жидкости содержится 20 г самой жидкости и 80 г растворителя. Именно в таких количествах и нужно смешать жидкость с ее растворителем.

8.2. Пусть мы смешиваем x г раствора 50-процентной и y г раствора 70-процентной кислоты. Тогда в первом растворе содержится чистой кислоты $\frac{50}{100}x$ г, а во втором $\frac{70}{100}y$ г. В полученной смеси массой $(x+y)$ г будет содержаться $\frac{50x+70y}{100}$ г чистой кислоты, что должно составлять 65% от смеси, т. е. $\frac{65}{100}(x+y)$ г. Таким образом, получаем уравнение

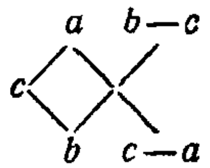
$$\frac{50x+70y}{100}=\frac{65}{100}(x+y),$$

откуда имеем $5y=15x$ и находим искомое отношение $x:y=$ $=5:15=1:3$. Это означает, что смешивать надо 1 часть первого раствора с 3 частями второго.

8.3. Пусть требуется смешать растворы a-процентной и b-процентной кислоты, чтобы получить c-процентный раствор. Без ограничения общности можно считать, что $a<b$ (иначе поменяем местами в тексте первый и второй растворы), причем $a\leqslant c\leqslant b$: если $c<a$ или $c>b$, то c-процентный раствор, конечно, получить нельзя. Рассуждая, как и при решении задачи 8.2, получаем, что если берется x частей первого раствора и y частей второго, то должно быть выполнено равенство

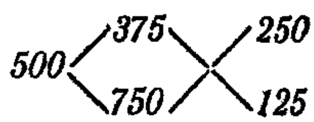
$$\frac{ax+by}{100}=\frac{c}{100}(x+y),$$

откуда вытекает соотношение $(b-c)y=(c-a)x$, т. е. $x:y=$ $=(b-c):(c-a)$. Такой же вывод дает описанная в условии задачи схема



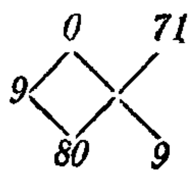
Таким образом, использование схемы вполне обосновано.

8.4. Пользуясь старинным способом, приведенным в задаче 8.3, получаем схему



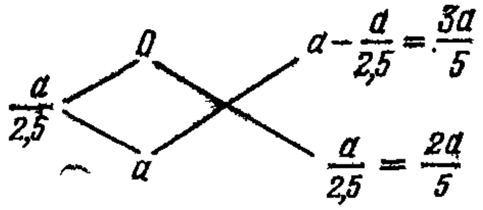
Отсюда делаем вывод, что золото 375-й пробы и 750-й пробы нужно сплавлять в отношении $250:125=2:1$.

8.5. Столовый уксус из эссенции можно получить, разбавив ее водой, т. е. 0-процентным «уксусом». Применяя старинный способ (см. задачу 8.3), имеем схему



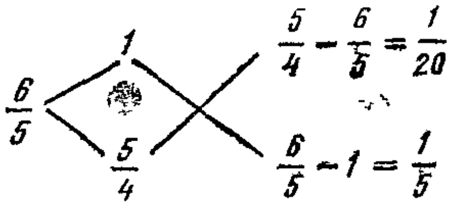
из которой получаем, что 9 частей эссенции нужно разбавить 71 частью воды, т. е. к 90 г эссенции следует добавить $90\times\frac{71}{9}=710$ г воды. В результате получится $90+710=$ $=800$ г столового уксуса.

8.6. Если обозначить через a содержание соли в морской воде и воспользоваться старинным способом, то получится схема



Таким образом, пресную и морскую воду нужно смешивать в отношении $\frac{3a}{5}:\frac{2a}{8}=3:2$, а, значит, к 4 кг морской воды нужно добавить 6 кг пресной.

8.7. Если использовать старинный способ, то получится схема



Следовательно, грузинский чай с индийским надо смешивать в отношении $\frac{1}{20}:\frac{1}{5}=1:4$. Для того чтобы обосновать полученный результат, достаточно убедиться в том, что использование старинного способа здесь правомерно. В самом деле, никакой принципиальной разницы нет в том, подсчитывать ли содержание какого-либо вещества в единице смеси или стоимость единицы смеси, т. е. количество денег, уплаченное в среднем за единицу смеси.

8.8. Пусть из 24 т руды выплавлено x т металла. Тогда количество тонн чистого металла (без каких бы то ни было примесей вообще) должно быть равно, с одной стороны, $0,6\times24$, а с другой — $0,96\,x$. Поэтому справедливо равенство

$$0,6\times24=0,96x,$$

откуда получаем

$$x=\frac{0,6\times24}{0,96}=15.$$

8.9. Вначале сухое вещество (мякоть) арбуза составляла 1% массы, а после усыхания 2%. Это означает, что доля сухого вещества в арбузе удвоилась, следовательно, вдвое уменьшил свою массу и сам арбуз.

8.10. Обозначим через x искомое количество раз, в которое усыхают грибы. Тогда из a кг свежих грибов получается $\frac{a}{x}$ кг сухих грибов, в которых содержание воды составляет $\frac{90}{x}\%$. Количество сухого вещества в грибах составляет 10% свежих грибов и $\left(100-\frac{90}{x}\right)\%$ сухих грибов. Следовательно, имеем равенство

$$0{,}1a=\left(1-\frac{0{,}9}{x}\right)\frac{a}{x},$$

откуда $(x-9)(x-1)=0$, т. е. $x=9$ (значение $x=1$ не подходит к условию задачи, ибо оно не задает никакого усыхания).

8.11. Для получения раствора наибольшей концентрации нужно смешать наиболее концентрированные растворы кислоты, а именно: 100 г 70-процентной, 100 г 60-процентной и 50 г 30-процентной. В 250 г полученного раствора будет содержаться $70+60+15=145$ г чистой кислоты, что составляет $\frac{145}{250}\times 100=58\%$. Аналогично для получения раствора наименьшей концентрации нужно смешать 100 г 30-процентной, 100 г 60-процентной и 50 г 70-процентной кислоты. В результате этого образуется 250 г раствора, содержащего $30+60+35=125$ г чистой кислоты, что составляет $\frac{125}{250}\times 100=50\%$.

Пусть мы смешали x г первого раствора, y г второго и z г третьего. Тогда 250 г 55-процентного раствора могло получиться только в случае выполнения равенств

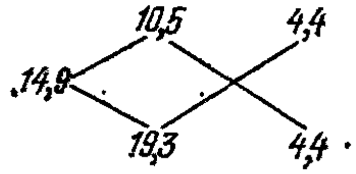
$$\begin{cases} x+y+z=250, \\ 0{,}7x+0{,}6y+0{,}3z=0{,}55\times 250. \end{cases}$$

Выписанная система имеет бесконечно много решений, удовлетворяющих неравенствам $0\leqslant y\leqslant 100$, $0\leqslant z\leqslant 100$, $0\leqslant x\leqslant 100$. Действительно, после несложных преобразований этой системы имеем равносильную систему

$$\begin{cases} x=3z-125, \\ y=375-4z, \end{cases}$$

в которой величину z можно считать параметром, удовлетворяющим неравенствам $\frac{125}{3}\leqslant z\leqslant\frac{375}{4}$. Например, значение $z=75$ задает значения $x=100$, $y=75$, т. е. для получения 950 г 55-процентного раствора можно взять 100 г первого раствора и по 75 г второго и третьего.

8.12. По закону Архимеда сплав при погружении в воду потерял в весе столько, сколько весит вытесненная им вода, т. е. 900 г. Следовательно, объем сплава равен 900 см³, а плотность равна $\frac{13\,410}{900}=14{,}9$ г/см³. Пользуясь старинным способом (см. задачу 8.3), получаем схему



из которой следует, что объемы золота и серебра в сплаве находятся в отношении 4,4 : 4,4, а значит, просто равны друг другу.

Заметим, что здесь мы применили старинный способ в несколько необычной ситуации: количества смешиваемых веществ измеряются их объемами, а роль концентрации играет плотность. Убедитесь сами, что схема по-прежнему применима.

8.13. Так как в результате переливаний объемы содержимого в обоих стаканах не изменились, то в первом стакане убавилось ровно столько кофе, сколько прибавилось молока. Следовательно, в итоге из первого стакана во второй перекочевало столько же кофе, сколько молока перекочевало из второго стакана в первый.

8.14. Количество черного кофе с самого начала было равно 1 стакану, а молока было долито сначала полстакана, затем треть стакана и, наконец, шестая часть стакана, т. е. в общей сложности $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ стакан. Следовательно, кофе и молока было выпито поровну.

8.15. Докажем, что независимо от произведенных переливаний в первом стакане кофе будет не меньше, чем молока. Действительно, в самом начале в первом стакане был только кофе, т. е. сформулированное утверждение справедливо. Теперь, если перед каким-то переливанием в первом стакане кофе было не меньше, чем молока, то возможны два варианта:

а) жидкость переливается из первого стакана во второй, и тогда, конечно, в первом стакане кофе останется не меньше, чем молока;

б) жидкость переливается из второго стакана в первый, а тогда перед переливанием во втором стакане кофе было не больше, чем молока (ведь общее количество кофе равно общему количеству молока), что сохранится и после переливания, а, значит, в первом стакане кофе снова станет не меньше, чем молока.

Таким образом, в любом случае, после любого количества переливаний в первом стакане молока не может оказаться больше, чем кофе.

8.16. Предположим, что на стенках колбы всегда остается одно и то же количество жидкости, равное a. Тогда если влить в колбу сразу всю воду в количестве b, то концентрация реактива в полученной от перемешивания смеси будет равна $\frac{a}{a+b}$, а на стенках колбы после полоскания останется реактив в количестве $\frac{a^2}{a+b}$. Если же влить в колбу $\frac{b}{2}$ воды, то концентрация реактива будет равна $\frac{a}{a+\frac{b}{2}}$, а после полоскания на стенках останется $\frac{a^2}{a+\frac{b}{2}}$ реактива. Аналогично подсчитывается, что после следующего полоскания колбы оставшимся количеством $\frac{b}{2}$ воды останется реактив в количестве

$$\frac{\frac{a^2}{a+\frac{b}{2}}\times a}{a+\frac{b}{2}}=\frac{a^3}{\left(a+\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Это меньше, чем в первом из рассмотренных случаев, поскольку

$$\frac{a^2}{a+b}-\frac{a^3}{\left(a+\frac{b}{2}\right)^2}=\frac{a^2\left(a+\frac{b}{2}\right)^2-a^3(a+b)}{(a+b)\left(a+\frac{b}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{a^2b^2}{4(a+b)\left(a+\frac{b}{2}\right)^2}>0.$$

Итак, выгоднее полоскать два раза меньшим количеством воды, чем один раз бо́льшим.

8.17. После первого разбавления из кастрюли будет отлит 1 л сиропа, а его концентрация станет равна 0,9.

После второго разбавления из кастрюли будет отлита десятая часть оставшегося сиропа, концентрация которого станет равна $0{,}9^2$. Вообще, после очередного n-го разбавления опять будет отлита десятая часть сиропа, а его концентрация станет равна $0{,}9^n$. Ни при каком натуральном значении n не будет выполнено равенство

$$0{,}9^n=0{,}5,$$

так как иначе при том же значении n было бы справедливо и равенство

$$2\times 9^n=10^n,$$

в котором левая часть кратна 3, а правая нет. Заметим, однако, что хотя точное равенство невозможно, но тем не менее после достаточно большого количества переливаний сироп обязательно окажется разбавленным по меньшей мере в два раза. В данном случае этот момент впервые наступит после седьмого разбавления, поскольку справедливы оценки

$$0{,}9^6>0{,}5>0{,}9^7.$$

8.18. Если баллон с давлением p_1 подсоединить к баллону с давлением p_2, то в обоих баллонах давление станет равным

$$\frac{1}{2}(p_1+p_2)=\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{2}p_2.$$

Если затем первый баллон подсоединить к баллону с давлением p_3, то в них обоих давление станет равным

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{2}p_2+p_3\right)=\frac{1}{4}p_1+\frac{1}{4}p_2+\frac{1}{2}p_3.$$

Продолжая это рассуждение и далее, мы получим, что если затем последовательно подсоединить первый баллон к баллонам с давлением $p_4, p_5, \ldots, p_n$, то в итоге давление в первом баллоне станет равным

$$\frac{1}{2^{n-1}}p_1+\frac{1}{2^{n-1}}p_2+\ldots+\frac{1}{4}p_{n-1}+\frac{1}{2}p_n.$$

Анализируя эту сумму, можно заметить, что наибольший вклад в нее дает величина p_n, которая входит в сумму с наибольшим коэффициентом $\frac{1}{2}$. Поэтому для того, чтобы эта сумма была максимальна, нужно, чтобы давление p_n было наибольшим из давлений всех баллонов. Действительно, если, напротив, наибольшее давление p отсутствует в списке p_2, p_3, . . ., p_n, то заменим p_n числом p, отчего сумма увеличится на $\frac{1}{2}(p-p_n)$. Если же наибольшее давление p совпадает с некоторым давлением p_m, не равным p_n, то поменяем местами в сумме величины p_m и p_n, отчего она увеличится на

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{m-1}}\right)(p-p_n).$$

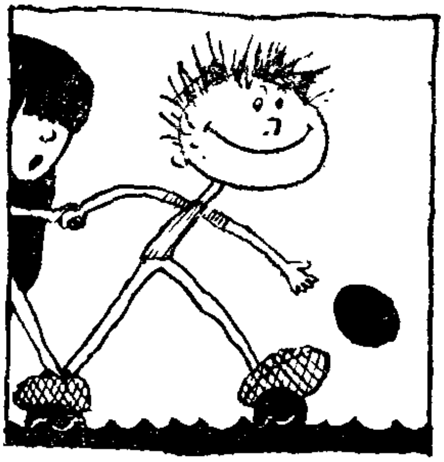
Итак, в любом случае, если $p_n<p$, то итоговое давление можно увеличить. Аналогично получаем, что давление p_{n-1} должно быть наибольшим из оставшихся давлений и т. д. Вообще, давления p_2, p_3, . . ., p_n должны образовывать возрастающую последовательность наибольших из имеющихся давлений. Кроме того, каждый баллон должен однажды быть подсоединенным к первому баллону. В самом деле, если, например, давление p не участвует в указанной выше сумме, то эту сумму можно еще увеличить на

$$\frac{1}{2^m}(p-p_1),$$

заменив слагаемое $\frac{1}{2^{m-1}}p_1$ суммой $\frac{1}{2^m}p_1+\frac{1}{2^m}p$.

Таким образом, наибольшее значение давления в первом баллоне можно получить, подсоединив его поочередно к каждому баллону в возрастающей последовательности их давлений.

Можно доказать, что большего давления по сравнению с давлением, полученным указанным способом, нельзя достичь, даже если разрешить соединять сразу несколько любых баллонов и использовать их более чем по одному разу.



§ 9. ПРОСТЕЙШАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА МЕСТНОСТИ

Для практических целей часто возникает необходимость производить геометрические построения на местности. Такие построения нужны и при строительстве зданий, и при прокладке дорог, и при различных измерениях объектов на местности. Можно подумать, что работа на ровной поверхности земли (а именно такой мы и будем ее считать во всех задачах настоящего параграфа) ничем, по существу, не отличается от работы циркулем и линейкой на обыкновенном листе бумаги. Это не совсем так. Ведь на бумаге циркулем мы можем проводить любые окружности или их дуги, а линейкой — любые прямые. На местности же, где расстояния между точками довольно велики, для подобных действий понадобилась бы длинная веревка или огромная линейка, которые не всегда имеются под руками. Да и вообще чертить прямо на земле какие бы то ни было линии — дуги или прямые — представляется весьма затруднительным. Таким образом, построения на местности имеют свою специфику.

Во-первых, откажемся от проведения настоящих прямых на земле. Будем эти прямые *прокладывать*, т. е. отмечать на них, например, колышками, достаточно густую сеть точек. Для практических нужд этого обычно хватает, поскольку передвижение по прямой от одного колышка к другому, расположенному на близком расстоянии от первого,— действие, вполне осуществимое.

Во-вторых, запретим при построениях проводить на земле какие-либо дуги вообще — большие или маленькие. Поэтому фактически циркуля у нас нет. Все, что остается от циркуля,— это способность откладывать на данных (п р о л о ж е н н ы х) прямых конкретные расстояния, которые должны быть заданы не численно, а с помощью двух точек, уже обозначенных колышками где-то на местности. Ведь сами расстояния будут измеряться шагами, ступнями, пальцами рук или любыми подходящими для этой цели предметами (в лучшем случае измерительными приборами). Так что отложить расстояние, составленное, скажем, из 25 шагов, 3 размахов пальцев и 2 спичечных коробок, можно лишь в таком же виде, но никак не умноженное, к примеру, на $\frac{3}{4}$ или на $\sqrt{2}$.

При указанных двух ограничениях, не пользуясь к тому же транспортиром, работать, конечно, трудно, но все же попробуйте решить предложенные ниже задачи!

9.1. Проложить прямую

На местности колышками обозначены две удаленные друг от друга точки. Как проложить через них прямую и, в частности, как можно без помощника устанавливать колышки на прямой между данными точками?

9.2. Точка пересечения прямых

На местности колышками обозначены две точки одной прямой и две точки другой прямой. Как найти точку пересечения этих прямых?

9.3. Симметрия относительно точки

На местности обозначены точки A и B. Найдите точку C, симметричную точке A относительно точки B.

9.4. Параллельная прямая

На местности обозначены три данные точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Через точку A проложите прямую, параллельную прямой BC.

9.5. Середина отрезка

Найдите середину отрезка AB, заданного на местности двумя точками A и B.

9.6. В данном отношении

Отрезок, заданный на местности двумя точками A и B, требуется разделить в отношении, в котором находятся длины двух отрезков KL и MN, заданных на местности точками K, L и M, N. Как это сделать?

9.7. Биссектриса угла

На местности обозначены три точки A, M и N, не лежащие на одной прямой. Проложите биссектрису угла MAN.

9.8. Перпендикуляр к прямой

Проложите на местности какую-нибудь прямую, перпендикулярную прямой, проходящей через заданные точки A и B. Как проложить перпендикуляр к прямой AB, проходящий через данную точку H?

9.9. Под заданным углом

На местности обозначены точки A и B. Найдите точки C, D и E, для которых выполнены равенства $\angle BAC=45°$, $\angle BAD=60°$, $\angle BAE=30°$.

Решения

9.1. Пользуясь зрительным эффектом состоящим в загораживании двух колышков третьим, стоящим на общей с ними прямой, нетрудно установить еще один колышек в некоторой точке C на продолжении отрезка с концами в двух данных точках A и B. После этого точки отрезка AB можно построить с помощью того же эффекта, поскольку они будут лежать на продолжении либо отрезка AC, либо BC (в зависимости от того, какая из точек — A или B — находится ближе к точке C). Вообще, любая точка прямой AB будет лежать на продолжении хотя бы одного из отрезков AB, AC или BC.

9.2. Пользуясь зрительным эффектом, указанным в решении задачи 9.1, легко найти точку пересечения прямых в том случае, если сразу ясно, что она лежит на продолжениях обоих отрезков с концами в данных точках. В противном случае достаточно сначала проложить одну или обе прямые так, чтобы на каждой из них с одной стороны от предполагаемой точки пересечения были отмечены по две точки.

9.3. Продолжим прямую AB за точку B и отложим на ней точку C на расстоянии AB от точки B. Для этого понадобится измерить в подходящих единицах длины расстояние между точками A и B.

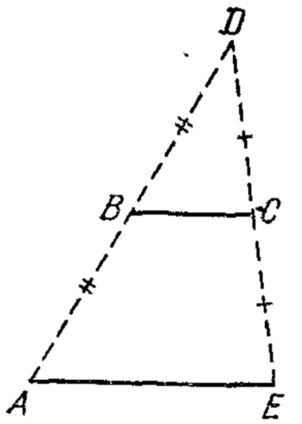


Рис. 8

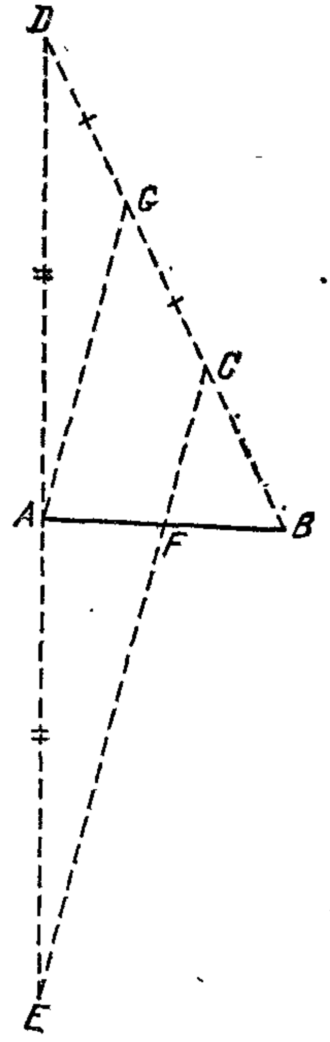


Рис. 9

9.4. Продолжим прямую AB за точку B и отложим на ней точку D на расстоянии AB от точки B (рис. 8). Продолжим прямую CD за точку C и отложим на ней точку E на расстоянии CD от точки C. Тогда отрезок AE будет параллелен отрезку BC, являющемуся средней линией треугольника ADE. Заметим, что предложенный способ выгодно отличается от множества других способов, опирающихся на измерение углов или на деление отрезка пополам.

9.5. Возьмем какую-либо точку C, не лежащую на прямой AB. Продолжим прямую BC за точку C и отложим на ней точку D на расстоянии $2BC$ от точки C (рис. 9). Продолжим прямую AD за точку A и отложим на ней точку E на расстоянии AD от точки A. Искомая середина F отрезка AB лежит на его пересечении с прямой EC. Действительно, отрезок CE параллелен отрезку AG — средней линии треугольника CDE (здесь G — середина отрезка CD). Так как, кроме того, $BC=CG$, то CF — средняя линия треугольника ABG, откуда $AF=FB$.

Быть может, приведенный способ нахождения середины отрезка покажется вам не самым простым. Однако его преимущества хорошо проявляются в следующей задаче, решив которую вы сможете делить отрезок не только на две, но и на любое число равных частей.

9.6. Построение точки F, делящей отрезок AB в отношении $AF:BF=KL:MN$, произведем аналогично построению середины отрезка AB, описанному в решении задачи 9.5. Отличие будет состоять только в том, что точку C выберем на расстоянии KL от точки B, а точку D — на расстоянии $2MN$ от точки C (рис. 9). В этом случае прямая EC по-прежнему будет параллельна отрезку AG, а значит, разделит отрезок AB в том же отношении, в котором она делит отрезок BG.

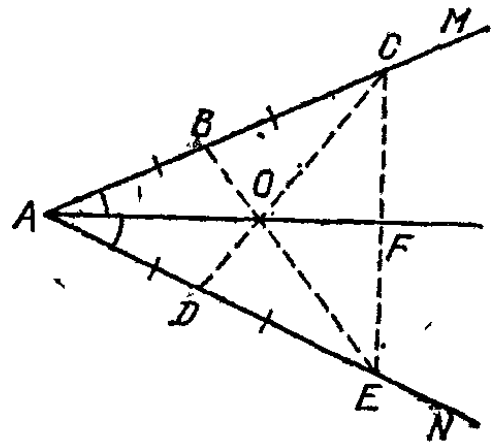


Рис. 10

9.7. Выберем на одной стороне данного угла (рис. 10) точки B и C, а на другой — точки D и E так, чтобы выполнялись равенства

$$AB=BC=AD=DE.$$

Найдем точку O пересечения прямых BE и CD. Тогда прямая AO будет искомой биссектрисой, поскольку в равнобедренном треугольнике ACE биссектриса AF является одновременно и медианой, а значит, проходит через точку O пересечения медиан EB и CD.

9.8. Продолжим прямую AB за точку B и отложим на ней точку C на расстоянии AB от точки B. Кроме того, отложим на том же расстоянии от точки B еще две точки D и E в двух разных, но не противоположных направлениях (рис. 11). Найдем точку F пересечения прямых AE и CD, а также точку G пересечения прямых AD и CE.

Прямая FG перпендикулярна прямой AB. Действительно точки A, E, D и C равноудалены от точки B, т. е. лежа на одной окружности с центром B и диаметром AC. Следс вательно, вписанные углы ADC и AEC прямые, поэтом AD и CE — высоты треугольника AFC. Так как все тр высоты этого треугольника пересекаются в одной точке (то прямая FG перпендикулярна стороне AC. Для тоı чтобы проложить перпендикуляр к прямой AB чер(данную точку H, достаточно теперь проложить через эı точку прямую, параллельную прямой FG (см. задачу 9.4).

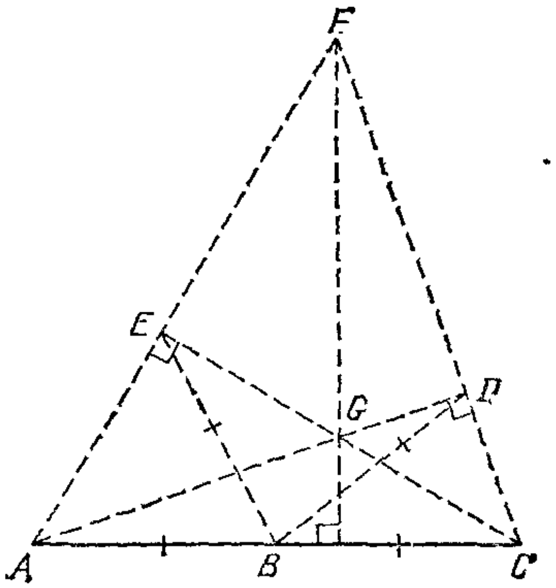


Рис. 11

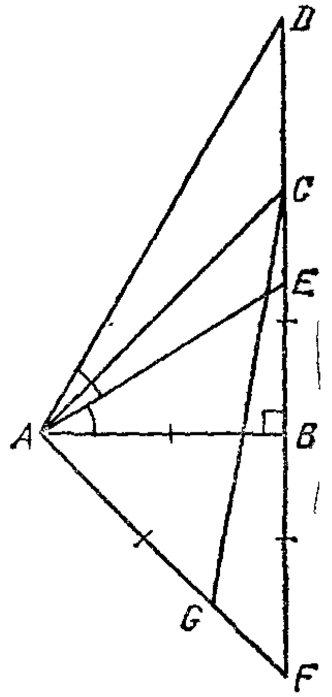


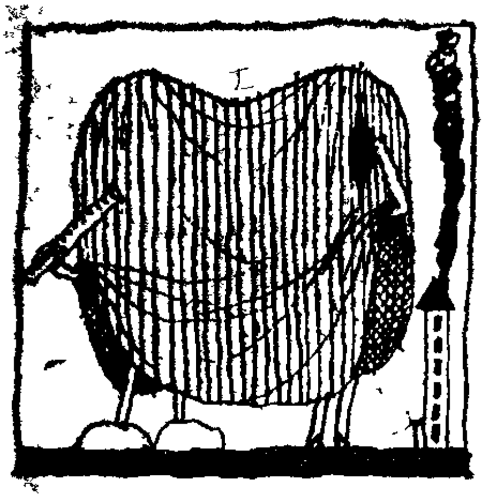
Рис. 12

9.9. Проложим перпендикуляр к прямой AB (см. дачу 9.8), пересекающий в какой-то точке луч AB. ограничения общности считаем для удобства, что точка пересечения и есть точка B. На перпендикуляр разные стороны от точки B отложим точки C и F (рис. удаленные от точки B на расстояние AB. Тогда угол равен 45° (из равнобедренного прямоугольного треуı ника ABC). На прямой AF отложим точку G на рассто AB от точки A, а затем на прямой BC отложим точı на расстоянии CG от точки B. Тогда угол BAD раве так как по теореме Пифагора для прямоугольных угольников ABC, ACG и ABD имеют место равенстı

$$AC^2 = 2AB^2, \qquad CG^2 = AG^2 + AC^2 = 3AB^2,$$

$$AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = 2AB.$$

Для построения точки E теперь остается проложить сектрису угла BAD (см. задачу 9.7).



§ 10. ИЗМЕРЕНИЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Для нахождения расстояний, высот, глубин или других размеров реальных объектов не всегда можно обойтись непосредственным их измерением — во многих случаях такие измерения сопряжены с определенными трудностями, а то и вообще практически невозможны. Однако в своей деятельности человеку приходится порой задумываться над тем, как все-таки можно определить интересующую его величину и как сделать это поточнее.

Вероятно, каждый из вас не раз задавал сам себе вопросы подобного рода, но вряд ли сходу находил на них ответы. В настоящем параграфе вам предлагается подумать над некоторыми наиболее типичными задачами. Советуем при их решении побеспокоиться о том, чтобы предлагаемый вами способ был действительно осуществим на практике и использовал минимум необходимых средств для построений (см. § 9), измерений и вычислений. Дело в том, что основными измерительными «приборами» для вас, которые всегда имеются «под рукой», будут являться: шаг, пядь (размах пальцев), сажень (размах рук), уровень глаз (расстояние от земли до глаз) и т. д. Не менее важно следить за надежностью вашего способа, т. е. зависимостью его точности от различных погрешностей, которые неизбежно возникают при работе на местности.

10.1. Длина шага

Вы хотите определить длину своего шага, чтобы впоследствии измерять расстояния шагами. Самый простой и, казалось бы, точный способ состоит в том, чтобы сделать один шаг и измерить расстояние между крайними (наиболее удаленными) точками двух ступней. Такой способ явно не годится по двум причинам. Во-первых, расстояние между крайними точками ступней не равно длине шага, а превосходит ее на длину одной ступни (правильнее было бы измерить расстояние, например, между носками двух ступней). Во-вторых, при всем старании вы вряд ли сможете сделать один обычный шаг — для этого вам нужно оказаться в состоянии обычной ходьбы. Так, как же все-таки определить длину своего шага?

10.2. Размах пальцев

Измеряя какие-либо длины пальцами руки, лучше не отрывать руку от измеряемой поверхности, а приставлять один палец к другому, который затем снова вытягивать в заданном направлении (описанный процесс отдаленно напоминает движение гусеницы). Найдите длину такого размаха своих пальцев.

10.3. В солнечный день

Как по длине тени, падающей от дерева в солнечный день, определить высоту этого дерева?

10.4. С помощью снимка

В вашем городе установлен большой памятник. К вам в руки попала почтовая карточка с фотографией этого памятника, сделанной с почтительного расстояния от него. Можно ли воспользоваться этим снимком для определения высоты памятника?

10.5. Препятствие на прямой

Вам понадобилось измерить на местности расстояние между двумя объектами, разделенными зданием или другим препятствием, не позволяющим непосредственно проложить прямую между этими объектами. Как тем не менее можно произвести указанное измерение?

10.6. Не замочив рукавов

Вы плывете на лодке по озеру и хотите узнать его глубину. Нельзя ли воспользоваться для этого торчащим из воды камышом, не вырывая его?

10.7. Высота дерева

Укажите способ, как измерить высоту дерева, не взбираясь на него и не прибегая к помощи теней.

10.8. Диаметр пруда

Перед вами раскинулся огромный пруд круглой формы, обойти который по окружности вы не можете из-за имеющихся на его берегу различных препятствий в нескольких местах. Кроме того, вам представляется затруднительным измерять расстояние между какими-либо точками, если только соединяющий их отрезок проходит над водой. Можно ли при таких ограничениях измерить диаметр пруда?

10.9. Высота недоступного объекта

Вы хотите узнать, на какой высоте находится шпиль, расположенный на здании, внутри и вблизи которого измерения затруднительны. Как, не приближаясь к зданию вплотную, измерить высоту шпиля?

10.10. Глубина котлована

Стоя на краю обрыва, вы хотите измерить глубину находящегося перед вами котлована. Нельзя ли это сделать, не спуская с обрыва никаких веревок?

10.11. Ширина реки

Вы находитесь на берегу реки и хотите измерить ее ширину, не имея возможности перебраться на другой берег. Для этого вы отыскиваете глазами на противоположном берегу реки близко к воде какой-либо заметный ориентир A — камень, деревце и т. п.— и отмечаете на своем берегу точку B, расстояние от которой до точки A представляет собой, по-вашему, ширину реки. Как измерить длину отрезка AB?

10.12. Расстояние до недоступной точки

Вы хотите узнать расстояние до высокого здания, которое можно увидеть прямо со двора вашего дома. Естественно, в городских условиях непосредственно пройти к зданию по прямой линии вам не удастся. Более того, свои геометрические построения вы можете осуществлять лишь на сравнительно небольшой площадке перед домом. Укажите способ для определения искомого расстояния.

10.13. Расстояние между двумя недоступными точками

Вы находитесь на одном берегу реки, а на другом, недоступном для вас берегу расположены два объекта. Как измерить расстояние между ними?

Решения

10.1. Достаточно пройти какое-либо заранее известное и не слишком короткое расстояние, скажем между соседними километровыми или стометровыми столбиками на шоссе, и поделить это расстояние на количество сделанных шагов.

Отметим, что средняя длина шага взрослого человека примерно равна половине его роста, считая до уровня глаз.

10.2. Проще всего отложить вдоль какой-нибудь прямой один или несколько десятков размахов пальцев, а затем поделить на их количество отложенную в результате длину.

10.3. Так как лучи солнца можно считать практически параллельными, то тень от дерева во столько же раз длиннее тени от какого-либо шеста, во сколько раз дерево выше шеста. Поэтому, установив вертикально шест известной высоты a и измерив отношение k длины тени от дерева к длине тени от шеста, мы вычислим искомую высоту дерева ka.

Заметим, что указанный способ не слишком надежен, так как отбрасываемая при свете солнца тень не имеет отчетливой границы из-за присущей ей неясно очерченной каймы полутени.

10.4. Для приблизительного нахождения высоты памятника по снимку можно выбрать две точки, расположенные у фундамента этого памятника, и измерить расстояние между ними на фотографии и на местности (второе расстояние нас интересует скорее не в чистом виде, а как проекция на прямую, перпендикулярную направлению, в котором был сфотографирован памятник). Найдя отношение k первого из расстояний ко второму, мы узнаем масштаб снимка, после чего останется замерить на нем высоту памятника и поделить ее на k.

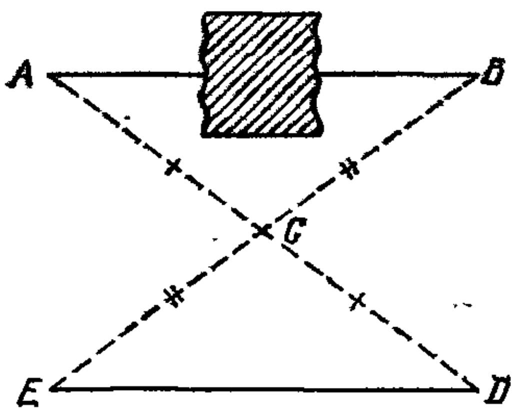


Рис. 13

10.5. Пусть A и B — данные точки на местности, между которыми определяется расстояние. Выберем точку C, из которой видны обе точки A и B (рис. 13). На продолжении отрезка AC за точку C отметим точку D на расстоянии AC от точки C. Аналогично на продолжении отрезка BC за точку C отметим точку E, для которой $CE=BC$. Тогда отрезки ED и AB равны, поскольку они симметричны относительно точки C.

Если же из-за недостатка места точки E и D выйдут за пределы досягаемости, то их можно в определенное число раз приблизить к точке C. Тогда отрезок ED будет в то же число раз короче отрезка AB, так как треугольники ABC и DEC будут подобны.

10.6. Слегка отклонив камыш и держа его в натянутом состоянии, замерим расстояние a между точками A и B, в которых камыш пересекает поверхность воды соответственно в вертикальном и наклоненном положении (рис. 14). Возвратим камыш в исходное состояние и определим высоту b над водой, на которую поднимется при этом точка B наклоненного камыша, заняв исходное положение C. Тогда, обозначив через D основание камыша, а через x — искомую глубину AD, из прямоугольного треугольника ABD находим

$$x^2+a^2=(x+b)^2,$$

откуда $2bx=a^2-b^2$ и $x=\dfrac{a^2-b^2}{2b}$.

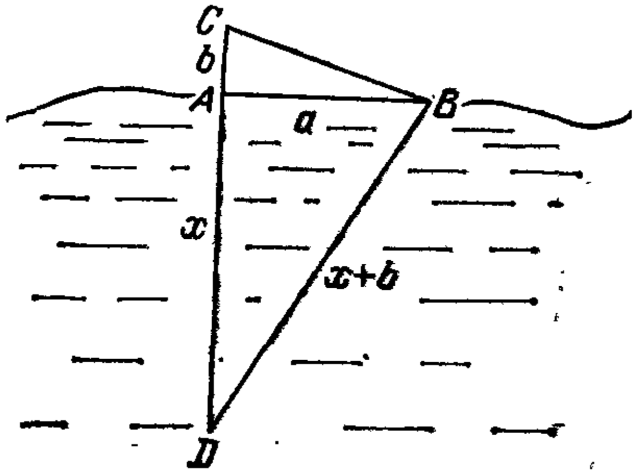


Рис. 14

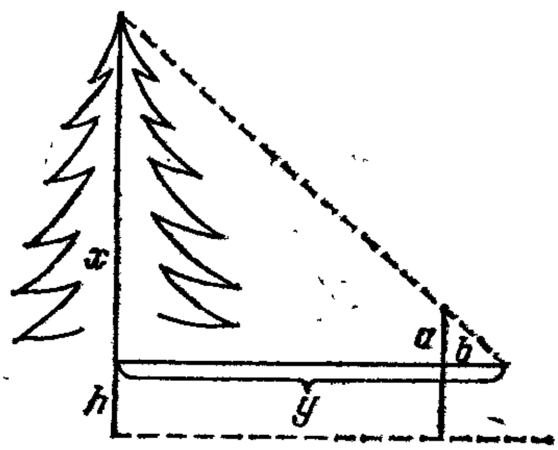


Рис. 15

10.7. Установив вертикальный шест на некотором расстоянии от дерева, нужно стать в такую точку, из которой верхний конец шеста загораживает в точности верхушку дерева (рис. 15). Тогда, если высота части шеста над уровнем глаз равна a, а расстояния от глаз по горизонтали до шеста и до дерева равны b и y соответственно, то из подобия треугольников можно найти высоту x дерева над уровнем глаз. Наконец, зная свой рост h до уровня глаз, получаем полную высоту дерева

$$h+x=h+\frac{ya}{b}.$$

Заметим, что вычисления и измерения можно упростить, если добиться равенства $b=a$, которое достигается выбором места установки шеста. Кроме того, можно лечь на землю, что позволит считать $h=0$, а в результате высота дерева окажется равной $x=y$.

10.8. Встав в точку A на некотором расстоянии от пруда (рис. 16), можно расположить перед собой горизонтальную палку длины a так, чтобы расстояния от обоих ее концов до одного глаза (второй глаз при этом лучше закрыть) были равны одному и тому же значению b, а сами концы палки зрительно совместились с крайними точками пруда, видимыми из точки A. Тогда, измерив расстояние y от A до ближайшей точки пруда по прямой, проходящей через середину палки, можно вычислить радиус x пруда, а значит, и его диаметр $2x$. Действительно, из подобия соответствующих прямоугольных треугольников находим

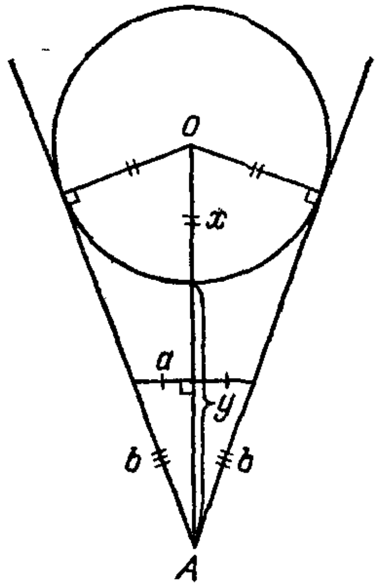


Рис. 16

$$\frac{x}{x+y}=\frac{a/2}{b},$$

откуда $2bx=ax+ay$, т. е. $x=y\frac{a}{2b-a}$.

Заметим, что если добиться равенства $b=a$ (что достигается выбором точки A), то коэффициент при y в последней формуле будет равен 1, а искомый диаметр пруда окажется равным $2x=2y$.

10.9. Установим вертикальный шест на некотором расстоянии от здания и станем в такую точку, из которой

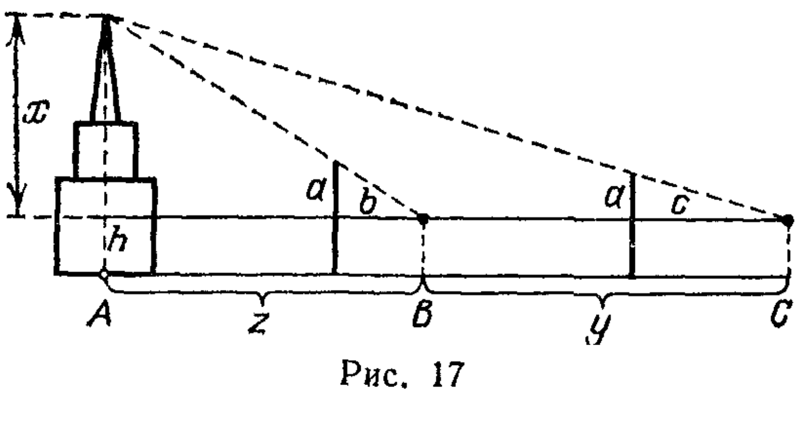


Рис. 17

верхушка шпиля зрительно совмещается с верхним концом шеста (рис. 17). Затем, пройдя некоторое расстояние в направлении от здания по прямой, на которой лежит первая точка и проекция A шпиля на горизонтальную плоскость, еще раз проделайте такую же операцию. Пусть высота шеста над уровнем глаз равна a, расстояние от глаз до шеста в первом положении оказалось равным b, а во втором c. Тогда, измерив расстояние y между точками

B и C, в которых мы стояли в первом и во втором случаях, можно сосчитать высоту x шпиля над уровнем глаз. В самом деле, обозначим через z расстояние между точками A и B. Из подобия соответствующих треугольников имеем

$$\frac{x}{z}=\frac{a}{b}, \qquad \frac{x}{z+y}=\frac{a}{c},$$

откуда $bx=az$, $cx=az+ay$ и $cx-bx=ay$, т. е.

$$x=y\frac{a}{c-b}.$$

Коэффициент при y в последнем равенстве можно сделать равным 1, если в первом положении шеста добиться равенства $b=a$, а во втором — равенства $c=2a$.

10.10. Глубину котлована можно измерить с помощью короткой палки. Для этого достаточно отыскать глазами на дне котлована какой-либо ориентир O и, встав на краю обрыва, установить палку горизонтально так, чтобы основание B палки оказалось на одной вертикали с глазами H, а другой ее конец A зрительно совместился с ориентиром O (рис. 18). Такую же операцию нужно проделать, лежа на краю обрыва и опустив основание C палки по той же вертикали ниже края обрыва. Измерив расстояния b и c от глаз до основания палки в первом и во втором положении соответственно, а также зная свой рост h до уровня глаз, можно вычислить глубину x котлована. Действительно, обозначим через y расстояние по горизонтали от ориентира до проекции края обрыва. Тогда из подобия соответствующих треугольников имеем

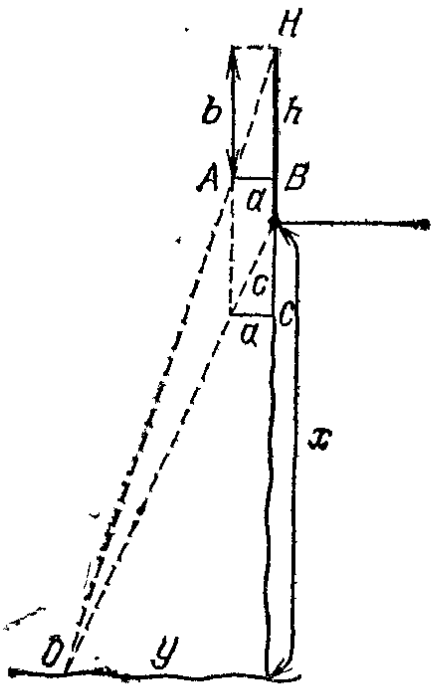


Рис. 18

$$\frac{x+h}{y}=\frac{b}{a}, \qquad \frac{x}{y}=\frac{c}{a},$$

откуда $\dfrac{x+h}{x}=\dfrac{b}{c}$, $cx+ch=bx$ и $x=h\dfrac{c}{b-c}$.

10.11. Выберем точку C на продолжении прямой AB за точку B, а также точку D, не лежащую на прямой AB (рис. 19). Затем выберем точки E и F на продолжениях прямых BD и CD соответственно за точку D так, чтобы выполнялись равенства $BD=DE$, $CD=DF$. Наконец, найдем точку G пересечения прямых EF и AD. Тогда искомое расстояние между точками A и B будет равно длине отрезка EG. Действительно, из равенства треугольников BDC и EDF (по двум сторонам и углу между ними) имеем равенство углов CBD и FED. Поэтому треугольники BAD и EGD равны (по стороне и двум прилежащим к ней углам), а значит, равны и их соответствующие стороны AB и GE.

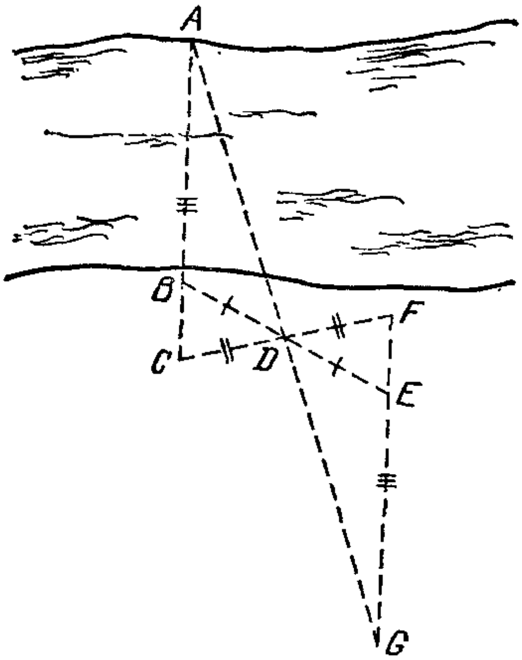


Рис. 19

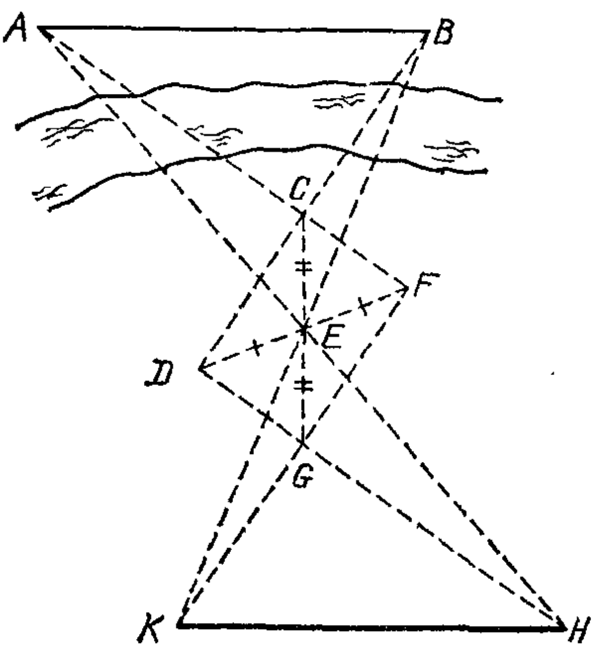
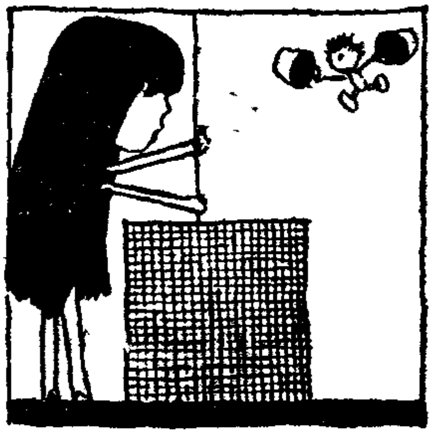


Рис. 20

10.12. Для нахождения расстояния от данной точки B до недоступной точки A можно использовать построения, аналогичные приведенным в решении задачи 10.11 с той лишь разницей, что точки E и F на рис. 19 следует выбрать ближе к точке D, т. е. на расстоянии, в одинаковое число раз меньшем длин отрезков BD и CD соответственно. Во столько же раз отрезок GE окажется меньшим отрезка AB, что вытекает из подобия (а не равенства, как это было в решении задачи 10.11) треугольников BAD и EGD.

10.13. Путь A и B — недоступные точки, между которыми надо найти расстояние. Выберем на некоторой прямой три точки D, E и F так, чтобы выполнялось равенство $DE=$ $=EF$ (рис. 20). При этом заранее побеспокоимся о том, чтобы точка C пересечения прямых AF и BD оказалась доступной и лежала с той же стороны от прямой DF, что и отрезок AB: этого можно достичь уменьшением отрезка DF и переобозначением его концов. На продолжении отрезка CE за точку

E отметим точку G на расстоянии CE от точки E. Далее найдем точку H пересечения прямых DG и AE, а также точку K пересечения прямых FG и BE. Тогда искомое расстояние будет равно KH. Действительно, при преобразовании симметрии относительно центра E точка C переходит в точку G, точка D — в точку F, прямая CD — в прямую GF, прямая BE — в себя, а точка B пересечения прямых CD и BE — в точку K пересечения GF и BE. Аналогично точка A при этом преобразовании переходит в точку H, поэтому отрезок HK симметричен отрезку AB относительно точки E.



§ 11. НА РАВНОМ РАССТОЯНИИ

В настоящем параграфе мы предлагаем вам несколько практических задач, в которых нужно использовать геометрический материал для нахождения точек или линий на местности из соображений равенства каких-либо расстояний. Желательно, чтобы те построения, которые вам понадобятся для решения этих задач, оказались по возможности более простыми. Если они не потребуют никаких средств, выходящих за рамки простейшей геометрии на местности (§ 9), то такие построения можно будет осуществить в обычных условиях без использования сколько-нибудь сложных измерительных приборов. В противном случае для реализации построений можно изобразить исходную конфигурацию на плане и, решив задачу на бумаге с помощью циркуля и линейки, перенести результат на местность.

Ниже мы предполагаем, что все населенные пункты имеют незначительные размеры и могут быть приняты в задачах за точки, а магистрали, каналы и железные дороги являются прямыми и имеют пренебрежимо малую ширину, т. е. могут быть представлены как прямые линии.

11.1. Автозаправочная станция

Невдалеке от двух населенных пунктов проходит шоссе. В каком месте этого шоссе нужно построить автозаправочную станцию, чтобы расстояния от нее до обоих пунктов были одинаковыми?

11.2. Где вырыть колодец?

Жильцы трех домов решили совместными усилиями построить колодец. Какое место для колодца следует выбрать, чтобы все три расстояния от него до домов были одинаковыми?

11.3. Мост через речку

Две магистрали пересекаются под углом, внутри которого протекает речка. Где построить мост через речку, чтобы расстояния от него до обеих магистралей были одинаковыми?

11.4. Пионерский лагерь

Две магистрали пересекают канал в разных местах. Где нужно разместить пионерский лагерь, чтобы расстояния от него до канала и до каждой магистрали оказались одинаковыми? Укажите место расположения пионерского лагеря, при котором эти расстояния минимальны?

11.5. Выбор направления

В каком направлении через город должна проходить магистраль, чтобы два данных населенных пункта лежали по разные стороны от нее на одинаковом расстоянии?

11.6. Расположение магистрали

Как должна проходить магистраль, чтобы расстояния от нее до трех данных населенных пунктов были одинаковыми? Укажите положение магистрали, при котором эти расстояния минимальны.

11.7. Как провести дорогу?

Магистраль пересекает канал под углом, внутри которого расположен населенный пункт. В каком направлении следует провести через этот пункт прямую дорогу, чтобы расстояния по ней до магистрали и до канала оказались одинаковыми?

11.8. Железнодорожный полустанок

Железная дорога пересекает канал под острым углом, внутри которого расположен населенный пункт. В каком месте железной дороги нужно расположить полустанок, чтобы расстояния от него до этого пункта и до канала оказались одинаковыми? Укажите положение полустанка, при котором эти расстояния минимальны.

11.9. Место для пруда

Две магистрали пересекаются под углом, внутри которого расположен населенный пункт. Как выбрать место для устройства пруда круглой формы, чтобы расстояния от него до этого пункта и до каждой магистрали оказались одинаковыми?

11.10. Где вырыть пруд?

Как выбрать место для устройства пруда круглой формы, чтобы расстояния от него до данной магистрали и до каждого из двух данных населенных пунктов, расположенных с одной стороны от магистрали, были одинаковыми?

Решения

11.1. Обозначим через A и B данные в задаче населенные пункты и проведем на местности серединный перпендикуляр к отрезку AB. Так как все точки этого перпендикуляра равноудалены от пунктов A и B и никакие другие точки этим свойством не обладают, то автозаправочную станцию нужно построить в точке пересечения перпендикуляра с шоссе (если такая точка найдется).

11.2. Пусть A, B и C — точки расположения трех данных домов. Проведем серединные перпендикуляры к отрезкам AB и BC. Тогда точка O их пересечения будет единственной точкой, равноудаленной от точек A, B и C, поскольку для этой точки выполнены равенства $AO=OB$ и $BO=OC$, а если точку O выбрать иначе, то для нее хотя бы одно из указанных равенств будет несправедливо. Заметим, что проведенные перпендикуляры могут и не пересечься, но только в случае, когда точки A, B и C лежат на одной прямой. Таким образом, искомое место для колодца — точку O — можно найти приведенным способом, но лишь при условии, что дома расположены не на одной прямой.

11.3. Проведем биссектрису угла, образованного магистралями. Так как все точки этой биссектрисы равноудалены от магистралей и никакие другие точки внутри угла этим свойством не обладают, то мост через речку нужно построить в точке пересечения биссектрисы с речкой (если такая точка найдется).

11.4. Каждая магистраль, пересекаясь с каналом, образует две пары вертикальных углов, а четыре их биссектрисы составляют две прямые (рис. 21). Так как все точки этих биссектрис равноудалены от канала и соответствующей магистрали, а никакие другие точки этим свойством не обладают, то все возможные места расположения пионерского лагеря лежат на пересечениях биссектрис углов при разных вершинах A и B.

Таких точек пересечения может быть, вообще говоря, четыре, поскольку любая из двух прямых, проходящих через вершину A, может пересечься с любой из двух прямых, проходящих через вершину B. Если магистрали не параллельны, то никакие пары этих прямых не параллельны и все четыре точки пересечения реализуются, а наименьшее расстояние до канала (а значит, и до магистралей) достигается в той точке O пересечения биссектрис, которая лежит внутри треугольника, образованного каналом и магистралями.

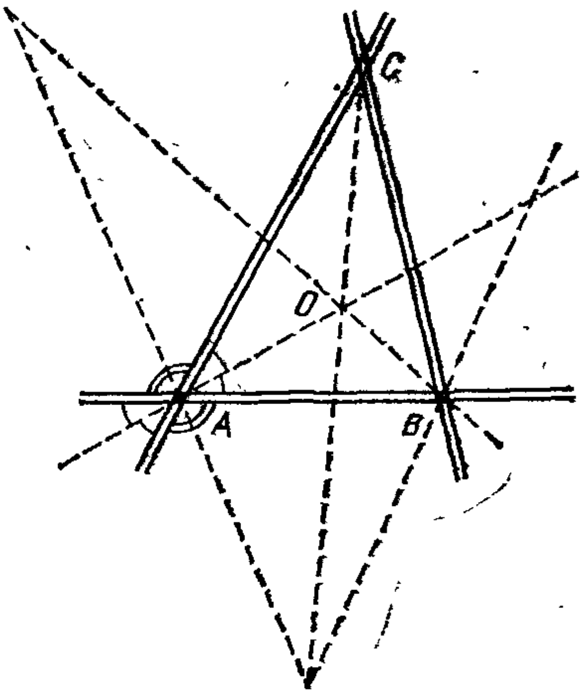


Рис. 21

Действительно, из двух точек пересечения биссектрисы внутреннего угла треугольника при вершине A с биссектрисами углов при вершине B ближе к вершине A (а значит, и к каналу) лежит точка O. Аналогично из двух точек пересечения, лежащих на биссектрисе внутреннего угла треугольника при вершине B, также выбираем точку O. Наконец, последняя точка пересечения биссектрис внешних углов треугольника при вершинах A и B лежит вместе с точкой O на биссектрисе угла треугольника при вершине C, причем точка O лежит ближе к вершине C, следовательно, ближе к магистралям и, стало быть, к каналу. Если же магистрали параллельны, то четыре биссектрисы углов при вершинах A и B образуют параллелограмм (из-за симметрии всей картины относительно середины отрезка AB), поэтому обе точки пересечения этих прямых равноудалены от канала.

11.5. Пусть через город A нужно провести магистраль, равноудаленную от пунктов B и C (рис. 22). Так как точки B и C должны лежать по разные стороны от искомой магистрали, то она должна пересечь отрезок BC, причем точка пересечения должна совпадать с серединой этого отрезка (что вытекает из равенства соответствующих прямоугольных треугольников). Таким образом, искомая магистраль определена однозначно, если только сама точка A не совпадает с серединой отрезка BC (в случае их совпадения годится любое направление).

11.6. Обозначим через A, B и C три данных населенных пункта. Если искомая магистраль может проходить так, чтобы все три точки лежали по одну сторону относительно магистрали (в том числе и на ней самой) и к тому же на равном расстоянии от нее, то точки A, B и C лежат на одной

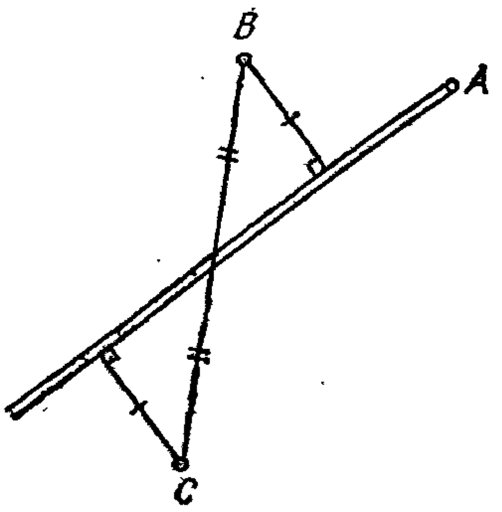


Рис. 22

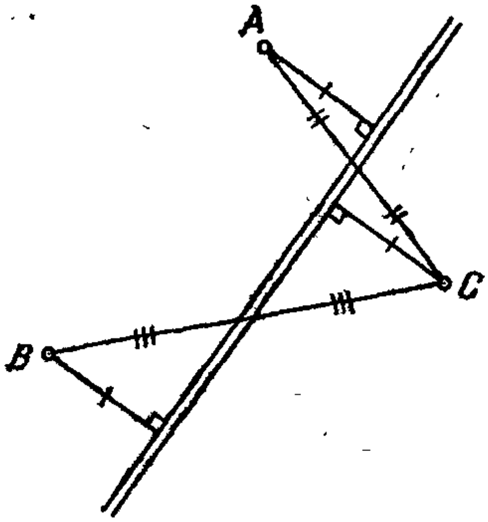


Рис. 23

прямой, параллельной магистрали. В этом случае расстояние минимально, когда магистраль проходит через эти точки.

В противном случае две из данных точек, скажем A и B, должны лежать по одну сторону от искомой магистрали, а третья — по другую (рис. 23). Так как магистраль равноудалена от точек A и C, то она проходит через середину отрезка AC (см. решение задачи 11.5), а так как она равноудалена от точек B и C, то проходит и через середину отрезка BC. Таким образом, мы доказали, что искомая магистраль проходит по одной из трех средних линий треугольника ABC.

Среди возможных расположений магистрали наименьшее расстояние до точек A, B и C, равное половине наименьшей высоты треугольника ABC, достигается, когда магистраль параллельна наибольшей стороне этого треугольника (точнее, какой-нибудь из наибольших сторон, если их несколько), поскольку наименьшая высота в треугольнике соответствует наибольшей стороне — ведь их произведение есть константа, равная удвоенной площади треугольника.

11.7. Проведем прямую через точку A пересечения магистрали с каналом и через данный населенный пункт B. Рассмотрим точку C на этой прямой, удаленную от точки B на расстояние AB (рис. 24). Тогда если искомая дорога пересекает магистраль и канал в точках D и E соответственно, то точка B есть центр симметрии четырехугольника $ADCE$, который, стало быть, является параллелограммом. Теперь сами точки D и E можно найти, проведя через точку C прямые, параллельные каналу и магистрали, до пересечения их соответственно с магистралью (в точке D) и с каналом (в точке E).

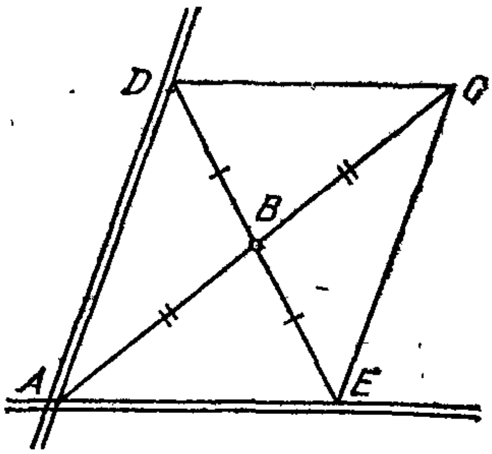


Рис. 24

11.8. Из точки A пересечения железной дороги с каналом через данный населенный пункт B проведем луч. Опустим из какой-либо точки O железной дороги перпендикуляр OC к каналу и найдем на луче AB точки, удаленные

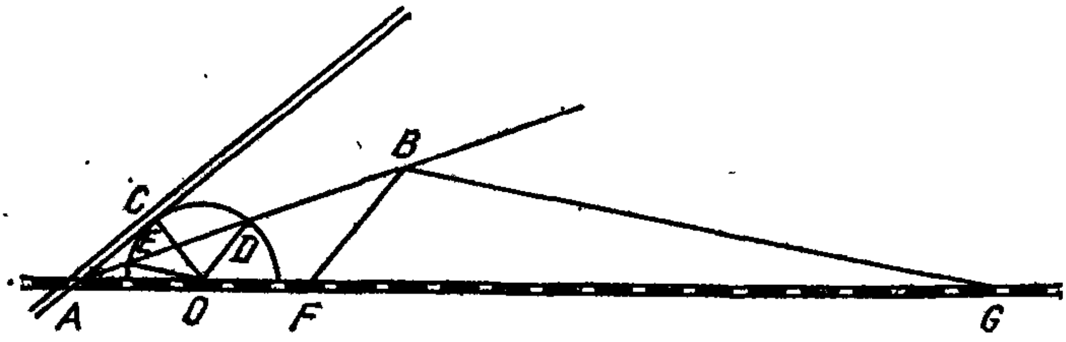


Рис. 25

от точки O на расстояние OC. Таких точек окажется две — это будут точки D и E, лежащие на окружности с центром O и радиусом OC. Для определенности будем считать, что $DA > EA$ (рис. 25). Проведем отрезки BF и BG, соединяющие точку B с точками F и G на железной дороге и параллельные отрезкам DO и EO соответственно. Тогда из подобия соответствующих треугольников будет следовать, что точки F и G равноудалены от канала и от точки B, т. е. они укажут искомые места расположения полустанка. Никаких других возможностей для расположения полустанка нет, поскольку для любой искомой точки существует преобразование гомотетии относительно точки A, переводящее искомую точку в точку O, а точку B в точку луча AB, удаленную от точки O на расстояние OC, т. е. в одну из точек D или E.

Минимальное расстояние до полустанка достигается в точке F, для которой имеем

$$BF = DO \times \frac{BA}{DA} < EO \times \frac{BA}{EA} = BG,$$

ибо $DO = EO$ и $DA > EA$.

11.9. Найдем точку O, в которой должен находиться центр пруда. Поскольку точка O равноудалена от двух данных магистралей, то она лежит на биссектрисе угла между ними. Таким образом, задача сводится к нахождению на данной прямой l — биссектрисе — точки O, равноудаленной от данной точки A — населенного пункта — и от другой данной прямой — той из магистралей, которая образует с прямой l угол, содержащий точку A (этот угол будет обязательно острым, так как он равен половине угла между магистралями). Такая ситуация разобрана в решении задачи 11.8.

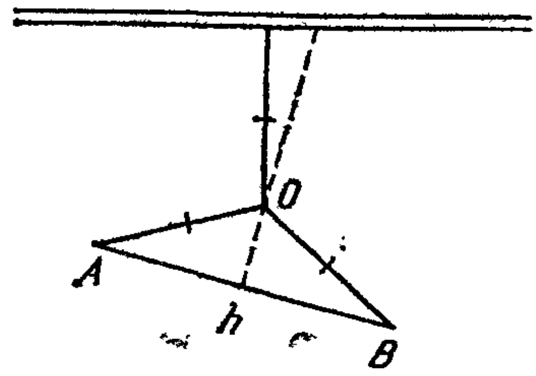
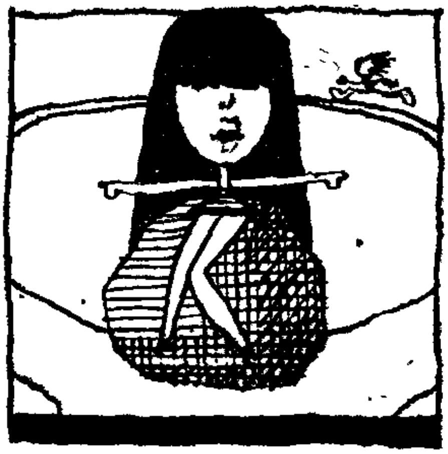


Рис. 26

11.10. Найдем точку O, в которой должен находиться центр пруда. Поскольку точка O равноудалена от двух данных населенных пунктов A и B, то она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB (рис. 26). Таким образом, задача сводится к нахождению на данной прямой h (перпендикуляре) точки O, равноудаленной от точки A или точки B и от другой данной прямой l (магистрали). Если прямые h и l не параллельны и не перпендикулярны, то они в пересечении образуют острый угол, внутри которого расположена одна из точек A и B (ведь обе эти точки лежат по одну сторону от прямой l). Способ нахождения точки O в этом случае указан в решении задачи 11.8. Если прямые h и l перпендикулярны, то точка O должна быть равноудалена от точки их пересечения и от точки A, и этот случай также был разобран в решении задачи 11.1. Наконец, если прямые h и l параллельны, то точка O должна быть удалена от точки A на расстояние, равное расстоянию d между прямыми h и l. Поэтому искомая точка лежит на пересечении прямой h и окружности с центром A и радиусом d (таких точек пересечения будет две, поскольку расстояние от точки A до прямой h меньше d — ведь одна из точек A или B расположена между прямыми h и l).



§ 12. КРАТЧАЙШИЕ СИСТЕМЫ ДОРОГ

Важными с практической точки зрения являются задачи, в которых требуется провести кратчайшую дорогу, удовлетворяющую заданным условиям, или выбрать кратчайший маршрут, использующий уже имеющиеся дороги, или, наконец, выбрать место для строительства какого-либо объекта так, чтобы впоследствии транспортные расходы оказались минимальными. Подобные задачи возникают в экономике на каждом шагу и от правильности их решения зависит очень многое.

Как и в § 11, будем считать все населенные пункты, дома, заводы и т. п. точками, а дороги, каналы и т. п. прямыми линиями. Старайтесь находить такие решения, которые требуют поменьше средств для их реализации.

12.1. Маршрут катера

Внутри водоема правильной круглой формы расположен маленький островок. Укажите кратчайший прямой маршрут катера, соединяющий какие-нибудь точки берега и имеющий промежуточный причал у островка.

12.2. Место для завода

Четыре населенных пункта расположены в вершинах выпуклого четырехугольника. В каком месте следует построить завод, чтобы сумма расстояний от него до всех четырех данных пунктов была наименьшей?

12.3. Газетный киоск

Вдоль прямой улицы по одну сторону от нее стоят несколько домов. В каком месте улицы нужно установить газетный киоск, чтобы сумма расстояний от него до всех домов была наименьшей?

12.4. Где построить школу?

В одном населенном пункте живет больше детей, чем в другом. В каком месте следует построить школу, чтобы общие затраты на перевозку детей были минимальны, если эти затраты пропорциональны как количеству детей, так и расстоянию от населенного пункта до школы?

12.5. Строительство водопровода

Для снабжения водой двух населенных пунктов, расположенных по одну сторону от канала, требуется на берегу канала построить водонапорную башню. В каком месте следует построить башню, чтобы суммарная длина труб от нее до каждого из пунктов (по прямой) была наименьшей?

12.6. Кратчайшая дорога

Магистраль и канал пересекаются под углом меньше 45°, внутри которого расположен населенный пункт. Как проложить кратчайшую дорогу, проходящую от одного пункта сначала к берегу канала, а затем к магистрали?

12.7. Мост через канал

Два населенных пункта расположены по разные стороны от широкого канала. Требуется построить мост через канал (перпендикулярно берегам) и проложить к нему дороги от обоих пунктов. В каком месте следует построить мост, чтобы в итоге путь между данными пунктами оказался кратчайшим?

12.8. Железнодорожная платформа

По одну сторону от железной дороги расположены два населенных пункта. В каком месте дороги следует построить платформу заданной длины, чтобы сумма расстояний от нее до данных пунктов была наименьшей?

12.9. Кратчайший маршрут

Две магистрали пересекаются под острым углом, внутри которого расположены два населенных пункта. Как проложить кратчайший маршрут автобуса, соединяющий два данных пункта и имеющий выезды к каждой из двух магистралей в заданном порядке?

12.10. Где построить мост?

Две магистрали пересекаются под углом, внутри которого протекает речка. Где построить мост через речку, чтобы сумма расстояний от него до обеих магистралей была наименьшей?

12.11. Где построить завод?

Три магистрали, пересекаясь, образуют треугольник. В какой точке этого треугольника следует построить завод, чтобы сумма расстояний от него до всех трех магистралей была наименьшей?

12.12. Направление магистрали

В каком направлении через город должна проходить магистраль, чтобы сумма расстояний от нее до двух данных населенных пунктов была наименьшей?

12.13. Наилучшее расположение

Как должна проходить магистраль, чтобы сумма расстояний от нее до трех данных населенных пунктов была наименьшей?

12.14. Выбор маршрута

Три завода расположены в вершинах разностороннего треугольника и соединены друг с другом магистралями. Внутри этого треугольника на одинаковом расстоянии от магистралей находится населенный пункт, который напрямую соединен дорогой с каждым заводом.

Каким должен быть кратчайший замкнутый маршрут автобуса, предназначенного для развозки жителей населенного пункта по всем трем заводам?

12.15. Как проложить дорогу?

Две магистрали пересекаются под углом, внутри которого расположен населенный пункт. Как проложить через этот пункт прямую дорогу, соединяющую магистрали, чтобы замкнутый маршрут автобуса, проходящий по этой дороге и участкам магистралей между точками их пересечения с дорогой и друг с другом, был кратчайшим?

12.16. Кратчайший замкнутый маршрут

Три магистрали, пересекаясь, образуют остроугольный треугольник. Как проложить кратчайший маршрут автобуса, имеющий выезды к каждой из трех магистралей?

12.17. С наименьшей суммой расстояний

Три населенных пункта расположены в вершинах остроугольного треугольника. Где нужно построить завод, чтобы сумма расстояний от него до всех трех данных пунктов была наименьшей?

12.18. Проселочная дорога

Через город проходит магистраль, на некотором расстоянии от которой находится населенный пункт. Требуется соединить проселочной дорогой магистраль с пунктом так, чтобы в итоге время проезда из города в этот пункт было наименьшим. От какой точки магистрали нужно отвести дорогу, если известно, что скорость транспорта по проселочной дороге в k раз меньше, чем по магистрали?

Решения

12.1. Кратчайший маршрут катера совпадет с хордой AB, перпендикулярной радиусу OC, проходящему через островок D (если островок находится в центре круга, то все маршруты будут иметь одинаковую длину; поэтому мы рассмотрим здесь случай, когда D не совпадает с O, изображенный на рис. 27). Для доказательства этого утверждения проведем через точку D еще какую-либо хорду EF и проверим, что $EF>AB$. Действительно, перпендикуляр OG к хорде EF имеет меньшую длину, чем наклонная OD к этой хорде. Следовательно, $EG>AD$ (так как в прямоугольных треугольниках OEG и OBD одинаковые гипотенузы $OE=OB$, но разные катеты $OG<OD$), а значит, $EF=2EG>2DB=AB$, т. е. хорда AB короче любой другой хорды, проходящей через точку D.

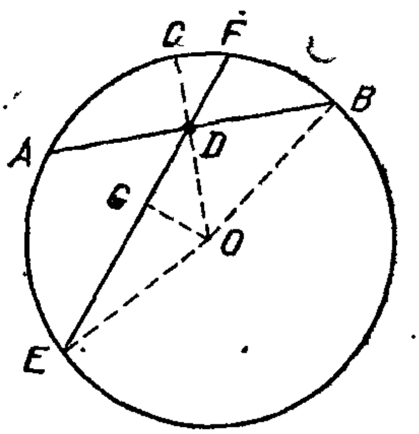


Рис. 27

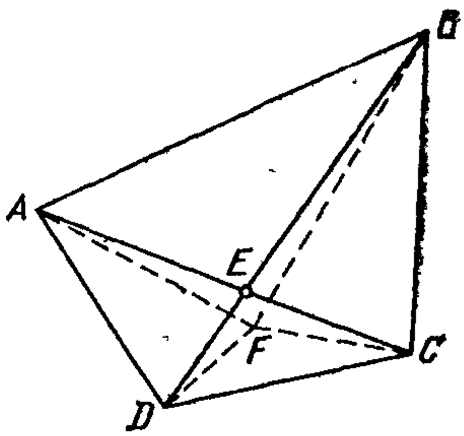


Рис. 28

12.2. Завод нужно построить в точке E пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ с вершинами в данных населенных пунктах (рис. 28). Докажем, что сумма расстояний от всех четырех пунктов A, B, C, D до любой точки F больше, чем до точки E. Действительно, складывая неравенства

$$AC \leqslant AF+FC, \quad BD \leqslant BF+FD,$$

получаем неравенство $AC+BD \leqslant AF+BF+CF+DF$, в котором равенство возможно только в случае, когда точка F лежит на обеих диагоналях AC и BD, т. е. когда F совпадает с E. Именно это и требовалось доказать.

12.3. Киоск нужно установить в любой точке, по обе стороны от которой расположено одинаковое количество домов (рис. 29). Если общее число домов нечетно, а сами дома находятся, скажем, в точках $A_1, A_2, \ldots, A_k, O, B_k, \ldots$ $\ldots, B_2, B_1$, то киоск нужно поставить у дома O. Если же общее число домов четно, а сами дома находятся в точках $A_1, \ldots, A_k, B_k, \ldots, B_1$, то киоск можно поставить в любой точке O между домами A_k и B_k. Действительно, общая сумма расстояний от киоска до всех домов складывается из расстояния от киоска до среднего дома O (если таковой имеется) и сумм расстояний от киоска до каждой пары домов

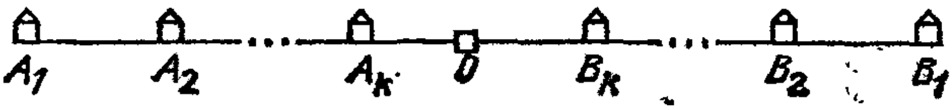


Рис. 29

A_i и B_i, где $i=1, \ldots, k$. При этом любая из указанных сумм не превосходит соответственно величины A_iB_i, а равна ей тогда и только тогда, когда киоск находится между домами A_i, B_i. Таким образом, необходимым и достаточным условием минимальности общей суммы является принадлежность точки установки киоска каждому из отрезков A_1B_1, $A_2B_2, \ldots, A_kB_k$ и, кроме того, совпадение этой точки с точкой O среднего дома, если число домов нечетно.

12.4. Школу следует построить в том из населенных пунктов A или B, в котором живет больше детей. Действительно, пусть для определенности таким пунктом является пункт A. Тогда если школа расположена в некоторой точке O, то затраты на перевозку детей пропорциональны величине

$$a\times OA+b\times OB=(a-b)OA+b(OA+OB),$$

которая не может быть меньше, чем $b\times AB$, так как $a>b$, $OA\geqslant 0$ и $OA+OB\geqslant AB$. С другой стороны, указанная величина принимает как раз значение $b\times AB$, но только в единственном случае — когда точка O совпадает с точкой A.

12.5. Один из двух населенных пунктов A или B, например B, отразим симметрично относительно канала (точнее, относительно его ближайшего берега). Если мы соединим отрезком полученную точку C с точкой A, то точка D пересечения этого отрезка с каналом и будет искомой точкой расположения водонапорной башни (рис. 30). В самом деле, для любой другой точки E на том же берегу канала суммарная длина труб до точек A и B будет равна суммарной длине труб до точек A и C (в силу симметрии относительно канала имеем равенства $EB=EC$ и $DB=DC$), которая в свою очередь будет превосходить величину $AC=$ $=AD+DB$, что и требовалось доказать.

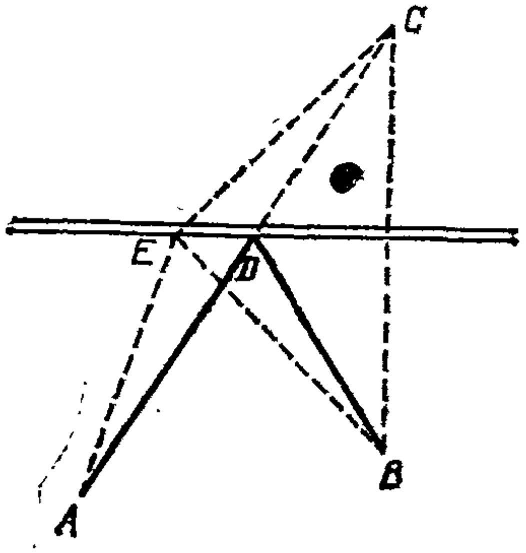


Рис. 30

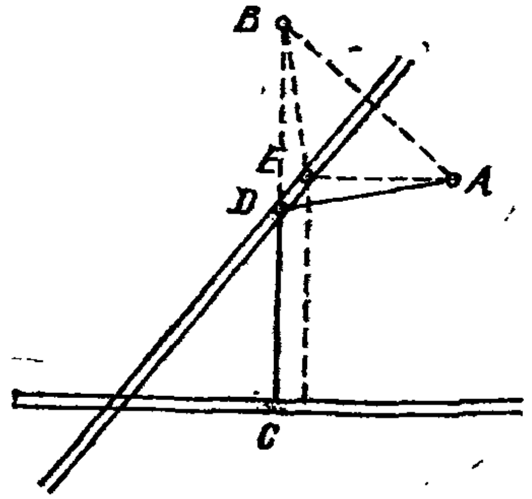


Рис. 31

12.6. Отразив симметрично относительно канала данный населенный пункт A, мы получим точку B, из которой достаточно теперь опустить перпендикуляр BC к магистрали, пересекающий канал в искомой точке D (рис. 31). Для доказательства того, что кратчайший маршрут от точки A к каналу, а затем к магистрали представляет собой ломаную ADC, заметим следующее: от любой другой точки E канала сумма расстояний до точки A и до канала будет равна сумме расстояний до точки B и до канала, которая в свою очередь будет превосходить величину $BC=AD+DC$.

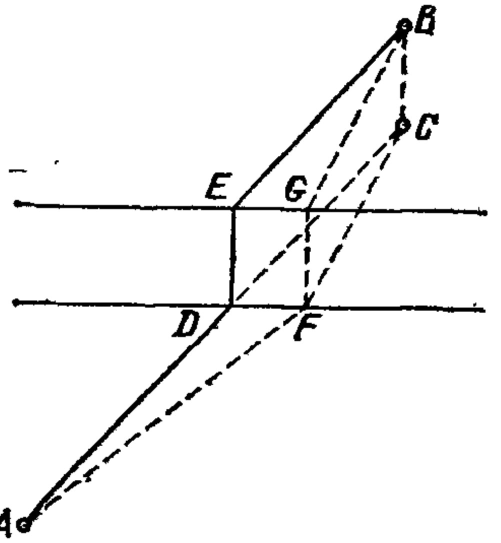


Рис. 32

12.7. Один из двух населенных пунктов A или B, например B, перенесем мысленно по направлению к каналу на расстояние, равное ширине канала (рис. 32). Полученную точку C соединим отрезком с точкой A, тогда точка D пересечения этого отрезка с берегом канала, ближайшим к точке A, как раз и даст один из концов моста DE. Докажем, что маршрут $ADEB$ будет кратчайшим из всех возможных. Действительно, для любого другого расположения моста FG (точка F не совпадает с точкой D, но лежит на том же берегу) имеем

$$AF+FG+GB=AF+FC+FG>AC+FG=AD+DC+DE=$$
$$=AD+DE+EB,$$

т. е. другой маршрут получается только длиннее.

12.8. Если проекции населенных пунктов A и B на линию железной дороги удалены друг от друга менее, чем на длину платформы, то саму платформу достаточно разместить так, чтобы обе проекции оказались на ней (сумма расстояний до платформы не может быть меньше, чем сумма расстояний до железной дороги, и этот минимум как раз реализуется в данном случае).

Если же указанные проекции удалены друг от друга более, чем на длину платформы, то сама платформа должна располагаться между этими проекциями (в противном случае ее можно передвинуть так, чтобы сумма расстояний от нее до пунктов A и B была еще меньше). Перенесем точку B на длину платформы вдоль железной дороги в сторону сближения с точкой A (рис. 33). Для полученной точки C выберем на железной дороге точку D, для которой сумма $AD+CD$ минимальна (см. задачу 12.5). Эта точка D и будет представлять собой ближайший к точке A край платформы. Докажем, что расположение платформы DE удовлетворяет условию задачи. Действительно, для любого другого расположения FG (край F считаем ближайшим к A) платформы имеем

$$AF+BG=AF+CF>AD+CD=AD+BE,$$

что и требовалось доказать.

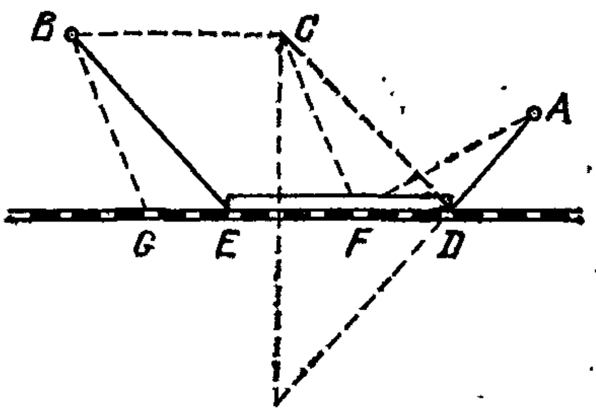


Рис. 33

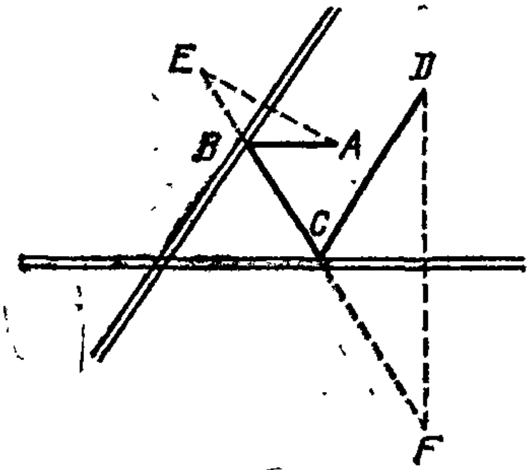


Рис. 34

12.9. Любой (не обязательно кратчайший) маршрут разобьем на три участка: от первого населенного пункта A к точке B одной магистрали, от точки B до точки C другой магистрали и от точки C до населенного пункта D (рис. 34).

Участок AB отразим симметрично относительно первой магистрали, а участок CD — относительно второй. Тогда получим соответственно участки EB и CF, причем расположение точек E и F не зависит от самих участков, поскольку они просто симметричны точкам A и D. Итак, любой маршрут $ABCD$ превращается в равный ему по длине маршрут $EBCF$ с фиксированными началом E и концом F. Следовательно, кратчайший среди маршрутов получается тогда, когда $EBCF$ есть отрезок прямой. Этим условием точки B и C определяются однозначно: достаточно отразить симметрично точки A и D, получив точки E и F, а затем найти точки пересечения прямой EF с магистралями. По точкам B и C, конечно, определяется и весь маршрут $ABCD$.

12.10. Заметим прежде всего, что все точки внутри угла между магистралями можно разбить на группы точек, имеющих одинаковые суммы расстояний до обеих магистралей.

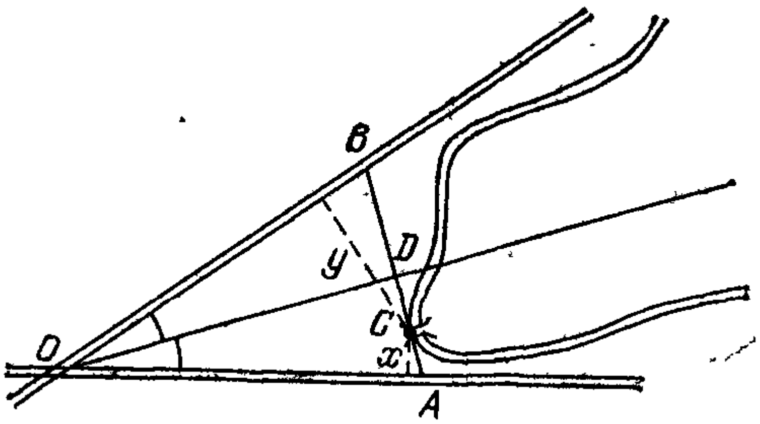


Рис. 35

Такими группами точек будут являться отрезки AB прямых, перпендикулярных биссектрисе угла (рис. 35). Действительно, любую точку C отрезка AB можно соединить с вершиной O угла, образованного магистралями, и разбить тем самым равнобедренный треугольник OAB на два треугольника OAC и OBC. Тогда если x и y — расстояния от точки C до сторон OA и OB, то площадь треугольника AOB будет равна сумме площадей треугольников OAC и OBC, т. е. величине

$$\frac{1}{2}x\times OA+\frac{1}{2}y\times OB=\frac{1}{2}(x+y)\times OA,$$

не зависящей от выбора точки C на отрезке AB. Поэтому сумма $x+y$ также не зависит от выбора этой точки, причем из соображений подобия следует, что указанная сумма будет тем меньше, чем ближе отрезок AB расположен к вершине O. Последняя близость полностью определяется расстоянием от точки O до проекции D точки C на биссектрису угла AOB.

Таким образом, для выбора места строительства моста достаточно спроектировать речку на биссектрису угла AOB и найти точку D проекции, ближайшую к точке O. Тогда мост нужно строить в точке C, которая проектируется в точку D.

12.11. Завод нужно построить в той из точек A, B или C пересечения магистралей, которая лежит против наибольшей стороны треугольника ABC (рис. 36). Если наибольших сторон две, то завод можно построить в любой точке меньшей стороны, а если треугольник равносторонний, то в любой точке треугольника. Действительно, считая для определенности справедливыми неравенства

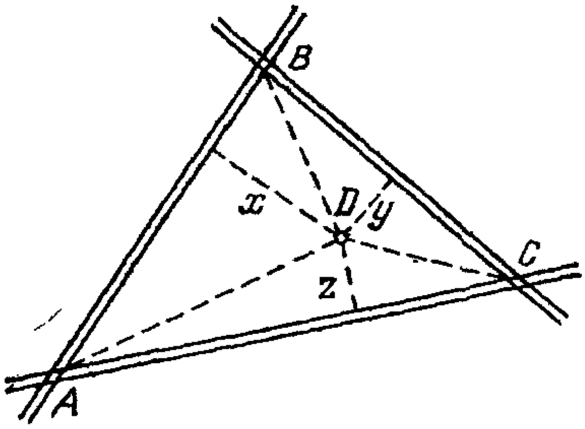


Рис. 36

$$AB \geqslant BC \geqslant AC$$

и обозначая расстояния от точки D до сторон AB, BC и AC через x, y и z соответственно, получаем, что площадь S треугольника ABC равна сумме площадей треугольников ADB, BDC и ADC:

$$S = \frac{1}{2} x\,AB + \frac{1}{2} y\,BC + \frac{1}{2} z\,AC \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} xAB + \frac{1}{2} yAB + \frac{1}{2} zAC \leqslant \frac{1}{2}(x+y+z)\,AB.$$

Поэтому справедливо неравенство

$$x + y + z \geqslant \frac{2S}{AB},$$

в котором равенство имеет место

либо при $z=y=0$, если $AB > BC$;
либо при $z=0$, если $AB=BC > AC$;
либо при любых x, y, z, если $AB=BC=AC$.

В соответствии с этими случаями получаем расположение точки D либо в точке C, либо на стороне AC, либо в любой точке треугольника ABC.

12.12. Магистраль должна проходить через тот из двух населенных пунктов A или B, который более удален от города C. Если же точки A и B равноудалены от точки C, то магистраль можно проводить через любую из них. Для доказательства предположим, что $AC \geqslant BC$, и рассмотрим точку D, симметричную точке B относительно точки C (рис. 37). Обозначим через x расстояние от магистрали до точки A, через y до точки B (оно же из соображений симметрии — расстояние до точки D). Магистраль пересекает либо отрезок AB в некоторой точке E, либо отрезок AD в некоторой точке F. В первом случае площадь S треугольника ABC равна сумме площадей треугольников AEC и BEC:

$$S = \frac{1}{2} xCE + \frac{1}{2} yCE = \frac{1}{2}(x+y)CE;$$

а во втором — площади треугольника ACD, которая равна сумме площадей треугольников AFC и DFC:

$$S = \frac{1}{2} xCF + \frac{1}{2} yCF = \frac{1}{2}(x+y)CF.$$

Поэтому величина $x+y$ будет тем меньше, чем больше длина отрезка CE или CF соответственно, которая принимает наибольшее значение при $E = F = A$, если $AC > BC = DC$, а также еще и при $E = B$ (или, что то же, при $F = D$), если $AC = BC = DC$. Мы воспользовались тем фактом, что если точка E лежит между точками A и B, то в одном из треугольников AEC или BEC угол при вершине E не является острым и против него лежит сторона AC или BC соответственно, бо́льшая стороны EC. Аналогично, если точка F лежит между точками A и D, то сторона FC меньше хотя бы одной из сторон AC или DC. Итак, мы доказали полностью утверждение, сформулированное в начале решения.

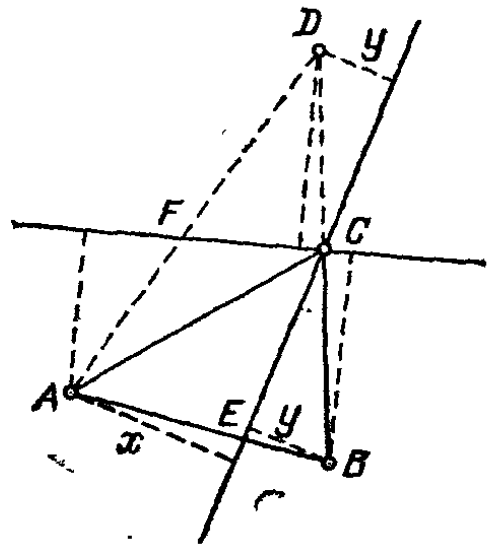


Рис. 37

12.13. Заметим, во-первых, что искомая магистраль должна проходить хотя бы через один из данных населенных пунктов A, B или C. Действительно, если она не проходит ни через один из этих пунктов, то ее можно параллельно перенести так, чтобы она проходила через один из пунктов, а сумма расстояний от нее до этих пунктов стала бы меньше (если все три пункта лежат по одну сторону от магистрали, то ее можно пропустить через ближайший из этих трех пунктов, а если только два пункта лежат по одну сторону от магистрали, то ее можно пропустить через ближайший из этих двух пунктов).

Во-вторых, искомая магистраль должна проходить хотя бы через два из пунктов A, B или C. Действительно, если она проходит только через один пункт, то, согласно решению задачи 12.12, ее можно повернуть вокруг этого пункта так, чтобы она прошла еще через один пункт, а сумма расстояний от нее до этих пунктов стала бы меньше.

В-третьих, из всех положений магистрали, при которых она проходит хотя бы через два пункта, наименьшая сумма расстояний, равная расстоянию до магистрали от третьего пункта, достигается тогда, когда магистраль проходит через две наиболее удаленные друг от друга точки A, B или C. В самом деле, указанное расстояние до магистрали должно быть равно наименьшей высоте треугольника ABC, которая опущена, разумеется, на наибольшую сторону. Заметим, что случай, когда точки A, B или C лежат на одной прямой, также укладывается в описанную схему, а случай равенства каких-либо сторон треугольника ABC его наибольшей стороне дает возможность проводить магистраль по любой из этих сторон.

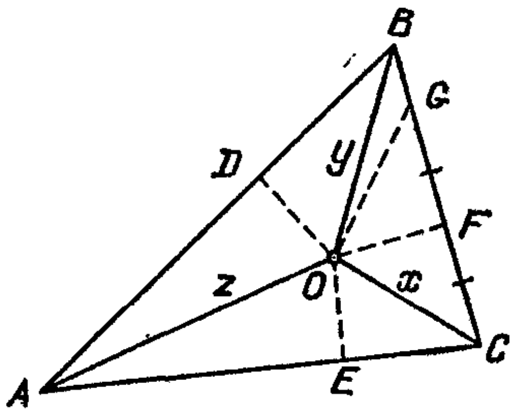


Рис. 38

12.14. Пусть заводы расположены в вершинах треугольника ABC, а населенный пункт — в центре O вписанной в треугольник окружности. Пусть, кроме того, стороны треугольника имеют длины $a=AB$, $b=AC$, $c=BC$ и касаются окружности в точках D, E, F соответственно (рис. 38). Обозначим $x=OC$, $y=OB$, $z=OA$ и докажем, что если $a>b$, то $a+x>b+y$. Действительно, из равенств отрезков касательных имеем

$$a-b=AB-AC=BD+AD-AE-EC=BF-CF$$

и, отразив точку C симметрично относительно точки F, получаем из неравенства треугольника OBG

$$0<OG+BG-OB=OC+BF-CF-OB=x+a-b-y.$$

Положим для определенности, что $a>b>c$, тогда

$$a+x>b+y>c+z.$$

Любой замкнутый маршрут, проходящий через точки O, A, B и C, можно считать составленным из прямых участков, которые соединяют эти точки в некоторой последовательности, начинающейся и кончающейся, скажем, точкой O. Тогда возможны только следующие три принципиально различных маршрута:

$$OCBAO,\ OBACO,\ OACBO,$$

а все остальные маршруты получаются из перечисленных заменой направления движения на противоположное. Длины этих маршрутов равны соответственно

$$x+c+a+z=l-(b+y),$$
$$y+a+b+x=l-(c+a),$$
$$z+b+c+y=l-(a+x),$$

где принято обозначение $l=a+b+c+x+y+z$. Поэтому наименьшую длину будет иметь последний из перечисленных маршрутов, т. е. маршрут, не проходящий по наибольшей стороне треугольника ABC.

12.15. Заметим прежде всего, что все прямые дороги, соединяющие две данные магистрали, можно разбить на

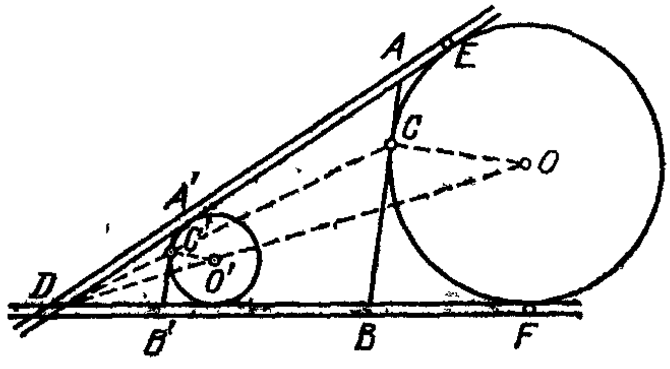


Рис. 39

группы дорог, образующих замкнутые маршруты одинаковой длины. Такими группами будут являться группы дорог, касающихся какой-то общей окружности, вписанной в угол между магистралями (дороги должны касаться той части окружности, которая обращена к точке D пересечения магистралей; рис. 39). Действительно, любая дорога AB, касающаяся данной окружности в токе C, будет образовывать маршрут, длина которого не зависит от точки C, так как равна сумме длин касательных DE и DF к окружности, проведенных из точки D:

$$DA+AB+DB=DA+AC+BC+DB=DA+AE+DB+BF=$$
$$=DE+DF.$$

Последняя сумма будет тем меньше, чем ближе центр окружности расположен к точке D.

Таким образом, для проведения искомой дороги достаточно выбрать ближайшую к точке D вписанную в данный угол окружность, которая еще допускает проведение к ней касательной из данной точки C. Такая окружность просто проходит через точку C, а строится она способом, примененным нами ранее при решении задачи 11.8 (проведем какую-нибудь вписанную окружность и найдем соответствующую точку C' ее пересечения с прямой DC, тогда в силу подобия искомый отрезок AB будет параллелен касательной, проведенной к проведенной окружности в точке C').

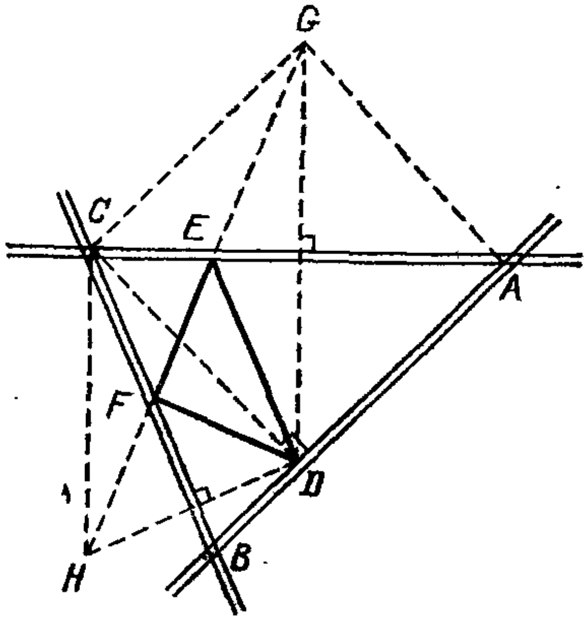


Рис. 40

12.16. Пусть магистрали образуют остроугольный треугольник ABC, а на сторонах AB, AC и BC автобус имеет выезды в точках D, E и F (рис. 40). Построим точки G и H, симметричные точке D относительно сторон AC и BC соответственно. Тогда длина ломаной $DFED$ равна длине прямой $GEFH$ и является наименьшей (при фиксированной точке D, а с ней и фиксированных точках G и H), если точки E и F лежат на прямой GH. Наконец, для нахождения точки D, при которой отрезок GH имеет наименьшую длину, заметим, что угол GCH вдвое больше фиксированного угла ACB, так как

$$\angle GCH = \angle GCA + \angle ACD + \angle DCB + \angle BCH = \\ = 2(\angle ACD + \angle DCB) = 2\angle ACB.$$

Поэтому основание GH равнобедренного ($GC = HC$) треугольника GCH имеет наименьшую длину, когда его боковая сторона GC минимальна. А эта ситуация в свою очередь реализуется, когда точка G, лежащая на отрезке, симметричном отрезку AB относительно прямой AC, является основанием перпендикуляра CG к этому отрезку, т. е. когда CD — тоже перпендикуляр к стороне AB. Итак, доказано, что точка D выезда автобуса к магистрали AB должна быть основанием высоты треугольника ABC. Аналогично доказывается, что и другие точки E и F также должны быть основаниями высот этого треугольника.

12.17. Пусть населенные пункты обозначены через A, B, C, а искомая точка расположения завода — через D. Повернем треугольник ACD на угол 60° вокруг точки A в направлении полуплоскости, не содержащей точку B (рис. 41). Получим треугольник AEF, удовлетворяющий равенствам

$$EF=CD, \quad FD=AD,$$

так как треугольники ACD и AEF равны, а треугольник AFD является равносторонним ($AF=AD$ и $\angle DAF=60°$).

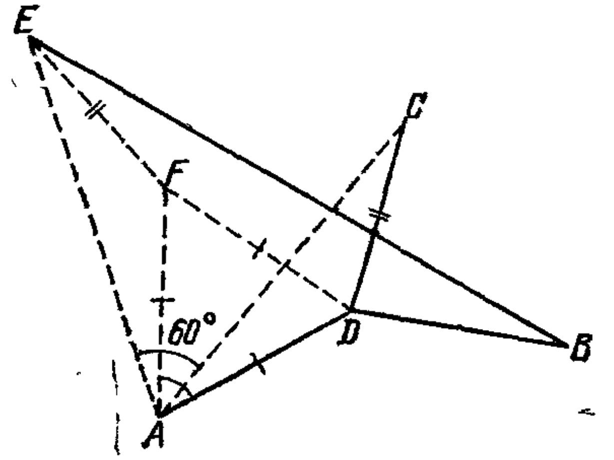


Рис. 41

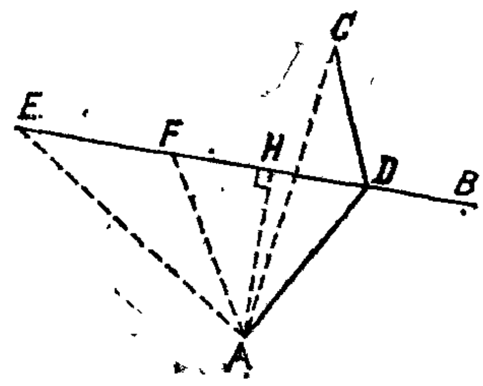


Рис. 42

Сумма расстояний от точки D до точек A, B и C равна длине ломаной $BDFE$ и, следовательно, не может оказаться меньше отрезка BE. Поэтому наименьшее значение указанной суммы будет равно длине отрезка BE, но при условии, что точку D можно подобрать так, чтобы и сама эта точка, и точка F, полученная в результате поворота, оказались лежащими на отрезке BE. Для построения такой точки достаточно провести перпендикуляр AH к отрезку BE и отложить от него угол HAD величиной 30° в направлении точки B (рис. 42). Докажите самостоятельно, что каждый из углов ADB, BDC и ADC, под которыми видны стороны треугольника ABC из искомой точки D, равен 120°.

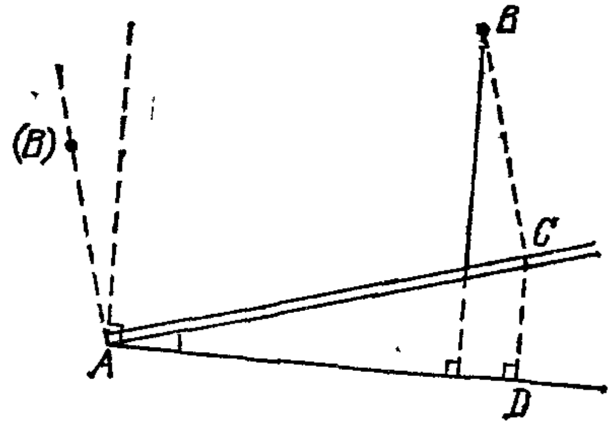


Рис. 43

12.18. Под углом к магистрали, косинус которого равен $1/k$, проведем луч из города A в той полуплоскости, которая не содержит населенного пункта B (рис. 43). Тогда для любой точки C магистрали, от которой предполагается отвести проселочную дорогу CB, имеем, что время движения транспорта по участку CA магистрали будет равно времени движения по проселочной дороге CD, перпендикулярной проведенному ранее лучу (скорости на участках BC и CD считаем равными). Следовательно, общее время движения по ломаной BCA пропорционально длине ломаной BCD. Так как кратчайшая такая ломаная совпадает с перпендикуляром к лучу, опущенным из точки B, то на этом перпендикуляре как раз и лежит искомая точка магистрали. Заметим, что точка B, возможно, и не проектируется на луч AD (а проектируется на его продолжение), тогда проселочную дорогу следует отвести прямо от города A.

§ 13. ИЗМЕРЕНИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЯ В ПУТИ

С какой скоростью идет поезд или машина, какова скорость течения реки, чему равно расстояние между пунктами; не столкнутся ли два движущихся объекта? Такие вопросы часто возникают во время наших путешествий. Но вот ответы на них не всегда удается подобрать «на ходу». Мы предоставляем вам возможность в спокойной обстановке с карандашом и бумагой в руках потренироваться в решении задач подобного рода, чтобы впоследствии не испытывать затруднений в измерениях и вычислениях реальных скоростей, расстояний и промежутков времени.

При решении задач настоящего параграфа в реальных условиях вам понадобится освоить операцию измерения времени с помощью секундомера, имеющегося почти на любых часах. Полезным будет и умение измерять расстояния, скажем, шагами (см. задачу 10.1). В некоторых случаях вам поможет знание стандартных величин, таких как скорость звука, длина рельса и т. д.

Самое главное, без чего нельзя решить ни одну задачу на движение,— это понимание физического смысла движения. Мы будем молчаливо предполагать, что все объекты движутся прямолинейно и равномерно, если только в условии задачи специально не оговорено, что это не так. Важную роль будет играть идея сложения скоростей; например, скорость велосипедиста при движении против ветра будет складываться из собственной скорости велосипедиста и скорости ветра, взятой с отрицательным коэффициентом. Разумеется, такого рода предположения являются в известной степени приближенными (как, впрочем, и сами измерения), однако они позволяют хотя бы грубо оценить интересующую нас величину и исследовать ее зависимость от тех или иных параметров.

13.1. Далеко ли до молнии?

Если вы оказались во время грозы в незащищенном месте, то, наверняка, при каждом ударе грома будете испытывать известный трепет от сознания того, что где-то совсем рядом происходит грозное явление природы. Чтобы хоть немного успокоиться в описанных условиях, попробуйте определить расстояние до молнии следующим способом: сосчитайте, сколько секунд проходит между вспышкой молнии и соответствующим ударом грома; тогда, поделив полученное число секунд на 3, вы найдете искомое расстояние, выраженное в километрах. Насколько точен предложенный способ?

13.2. За рулем автомобиля

Представьте себе, что вы сидите за рулем автомобиля и хотите узнать скорость машины, идущей впереди вас. Как это проще всего сделать?

13.3. Скорость поезда

Находясь в движущемся поезде, вы, конечно, не раз задумывались о том, можно ли определить скорость этого поезда. Предложите какие-нибудь способы измерения скорости, разумеется, осуществимые в условиях поездки. Нельзя ли измерить скорость поезда, лежа на полке и даже не глядя в окно?

13.4. Средняя скорость

Автомобиль с грузом ехал из одного города в другой со скоростью 60 км/ч, а возвращался обратно порожняком со скоростью 100 км/ч. Какова средняя скорость автомобиля? Не спешите с ответом: средняя скорость не равна $\frac{60+100}{2}=$ $=80$ км/ч!

13.5. По тоннелю

Поезд длиной 1 км идет со скоростью 60 км/ч. Сосчитайте в уме, сколько времени понадобится поезду для прохождения тоннеля длиной 1 км.

13.6. Скорость и длина поезда

Вы засекли время, за которое поезд прошел мимо телеграфного столба, и время, в течение которого этот поезд проходил по мосту. Затем вы определили длину моста. Как по результатам ваших наблюдений определить скорость и длину поезда?

13.7. Высота горы

Из окна поезда, в котором вы едете, видна гора. Можете ли вы, зная скорость поезда (см. задачу 13.3), определить высоту этой горы?

13.8. На берегу реки

Каким образом можно измерить скорость течения реки?

13.9. По скоростям катеров

По реке в обоих направлениях ходят катера, имеющие одинаковую собственную скорость. Как в этих условиях определить скорость течения реки?

13.10. В поход на плоту

Вы собираетесь проплыть на плоту по реке от одной пристани до другой. По расписанию вы узнаете, что пароход между этими пристанями не делает остановок и в одну сторону идет 3 часа, а в другую 4 часа 30 минут. Рассчитайте по этим данным, за сколько часов вы проплывете на плоту расстояние между пристанями.

13.11. С ветром и без него

Велосипедист проезжает 1 км при попутном ветре за 3 минуты, а при движении против того же ветра — за 5 минут. За сколько минут он проезжает 1 км в безветренную погоду?

13.12. Длина горной дороги

На горной дороге, соединяющей два селения, нет горизонтальных участков пути. Автобус в гору всегда идет со скоростью 30 км/ч, с горы 60 км/ч, а на проезд туда и обратно он тратит в общей сложности 2 часа (не считая остановок). Найдите длину пути между этими двумя селениями.

13.13. Число видимых ступенек эскалатора в метро

Вбежав вверх по эскалатору, вы насчитали 30 ступенек, а затем, сбежав вниз по тому же эскалатору с той же скоростью относительно него, вы насчитали 150 ступенек. Сколько бы ступенек вы насчитали, пробежав в одну сторону по неподвижному эскалатору?

13.14. Число встречных пароходов

Пароход из порта A в порт B идет 10,5 суток. Ежедневно в полдень одним и тем же маршрутом как из порта A в порт B, так и из порта B в порт A отправляется по пароходу. Сколько пароходов встречает во время плаванья каждый из этих пароходов?

13.15. Сколько нужно поездов?

На железнодорожной линии, соединяющей пункты A и B, расположено несколько станций, причем на весь путь от A до B с учетом промежуточных остановок поезд затрачивает 2 часа 22 минуты. Какое наименьшее количество поездов необходимо иметь для обслуживания этой линии, чтобы с любой станции в любом направлении через каждые 20 минут отправлялся поезд?

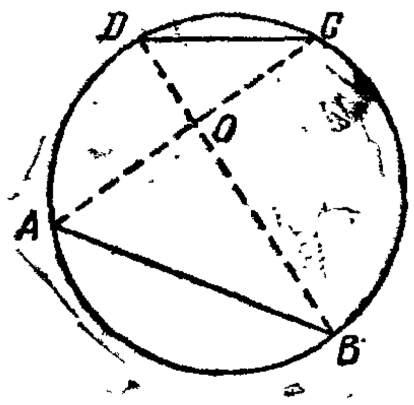


Рис. 44

13.16. Не произойдет ли столкновение?

На берегу большого круглого водоема расположены последовательно пристани A, B, C, D (рис. 44). От пристани A по направлению к пристани B отправился катер и одновременно с ним от пристани D по направлению к пристани C отправилась моторная лодка. Известно, что катер и лодка прибыли в пункты назначения также одновременно. На каком расстоянии друг от друга прошли бы катер и лодка, если бы они поменялись пунктами назначения?

13.17. Наименьшее расстояние

Два парохода движутся по морю взаимно перпендикулярными курсами к точке O их пересечения со скоростями 30 и 40 км/ч. В начальный момент расстояния от этих пароходов до точки O были равны 100 и 300 км соответственно. Найдите наименьшее расстояние между пароходами во время их движения.

13.18. По трем замерам

Расстояние между двумя кораблями, движущимися по морю, в 6.00 ч было равно 200 км, в 13.00 ч было 150 км, а в 17.00 ч было 130 км. Каково наименьшее расстояние между этими кораблями?

Решения

13.1. Принципиальная точность предложенного метода очень высока. В отличие от света, распространяющегося практически мгновенно, звук в воздухе движется со скоростью 330 м/с. Это означает, что за время, прошедшее с момента вспышки молнии до момента, когда раздался гром, звук прошел расстояние от молнии до наблюдателя. Так как за 3 секунды звук проходит расстояние 990 м, которое в описанных условиях вполне можно принять за 1 км, то число пройденных им километров втрое меньше числа сосчитанных секунд.

13.2. Если вы будете некоторое время ехать на постоянном расстоянии от впереди идущей машины, то ваш спидометр покажет скорость этой машины, совпадающую со скоростью вашего автомобиля.

13.3. Один из способов состоит в том, чтобы измерить время, за которое поезд проходит, скажем, 1 км, и вычислить скорость поезда, поделив расстояние на время и переведя результат в более привычные единицы км/ч. Например, если поезд прошел 1 км за 72 секунды, то его скорость равна

$$\frac{1\ \text{км}}{72\ \text{с}}=\frac{1\ \text{км}}{72\times\frac{1}{3600}\ \text{ч}}=\frac{3600}{72}\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}=50\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Для определения расстояния в 1 км можно воспользоваться километровыми столбиками, расположенными вдоль почти любой железной дороги.

Другой способ основан на том, что, находясь в поезде, можно услышать стук колес поезда о стыки рельсов. Зная длину одного рельса, равную обычно 12,5 м, и сосчитав количество n ударов колес, скажем, за 1 мин, находим скорость поезда:

$$\frac{n\times 12{,}5\ \text{м}}{1\ \text{мин}}=n\times\frac{\frac{12{,}5}{1000}\ \text{км}}{\frac{1}{60}\ \text{ч}}=n\times\frac{3}{4}\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

13.4. Заметим, что время, в течение которого автомобиль двигался со скоростью 60 км/ч, больше, чем время, в течение которого он двигался со скоростью 100 км/ч. Поэтому и «вклад» меньшей скорости в среднюю его скорость больше, чем «вклад» большей скорости, а значит, средняя скорость должна быть меньше 80 км/ч. Более точно, эта мысль подтверждается определением средней скорости как отношения пройденного расстояния к времени движения. Действительно, если обозначить расстояние между городами через s, то средняя скорость будет равна

$$\frac{2s}{\frac{s}{60}+\frac{s}{100}}=\frac{2}{\frac{100+60}{60\times100}}=75\ \text{км/ч}.$$

13.5. Так как скорость поезда равна 1 км/мин, то через одну минуту после начала вхождения в тоннель поезд окажется расположенным полностью в тоннеле, а еще через минуту он покинет тоннель. Итого для прохождения тоннеля поезду понадобится две минуты.

13.6. Пусть за время x поезд прошел мимо телеграфного столба и в течение времени y он проходил по мосту длины s. Заметим, что время y прохождения моста можно разбить на время x прохождения всего поезда мимо начальной точки этого моста и время $y-x$ прохождения хвоста поезда по мосту длины s. Поэтому скорость поезда, совпадающая со скоростью его хвоста, равна $\frac{s}{y-x}$. Длина же поезда равна расстоянию, которое он проходит за время x, т. е. $\frac{xs}{y-x}$.

13.7. Заметим, что вид горы в окне поезда можно сравнить с ее фотографией: если зафиксировать положение глаз относительно окна, то на стекле можно произвести необходимые замеры ничуть не менее эффективно, чем на фотографии. Применим метод, который был предложен для определения высоты памятника по снимку в решении задачи 10.4. Будем исходить из того, что пропорции на стекле более или менее соответствуют реальным пропорциям горы. Выберем две точки, расположенные примерно на одной горизонтали у основания горы, и вычислим отношение расстояния между этими точками к высоте горы по результатам измерений на стекле. Найдем реальное расстояние (точнее, его проекцию на прямую, вдоль которой идет железная дорога) между выбранными точками. Это можно сделать так: засечь время, в течение которого некоторая точка на стекле проходит (по мере движения поезда) путь от одной из выбранных точек до другой, а затем умножить это время на скорость поезда. Наконец, пользуясь вычисленной ранее пропорцией, подсчитаем и реальную высоту горы.

Аналогично можно определять из окна самолета размеры, скажем, облаков, пользуясь информацией о скорости самолета, которая обычно объявляется во время полета.

13.8. Бросим какой-либо легкий предмет в реку подальше от берега (на середину) и засечем время, за которое этот предмет проплывет по течению некоторый путь, соответствующий расстоянию между двумя точками берега. Теперь, измерив это расстояние и поделив его на засеченное время, получим скорость течения реки. Можно проделать то же самое несколько раз в разных местах реки и на разном удалении от берега, а после этого найти среднее арифметическое полученных значений скорости.

13.9. Выделим участок реки, имеющий известную длину s, и засечем время движения катера по этому участку в одном и в другом направлении — пусть это будут соответственно значения x и y, причем $x<y$. Тогда скорость катера по течению реки равна $\frac{s}{x}$, против течения $\frac{s}{y}$, а полуразность этих скоростей $\frac{1}{2}\left(\frac{s}{x}-\frac{s}{y}\right)$ равна скорости течения. В самом деле, если u — собственная скорость катера, а v — скорость течения реки, то разность скоростей по течению $u+v$ и против течения $u-v$ равна $u+v-u+v=2v$, т. е. удвоенной скорости течения.

13.10. Если обозначить через u и v скорости парохода (в стоячей воде) и течения реки соответственно, то расстояние между пристанями будет равно, с одной стороны, $3(u+v)$, а с другой стороны, $4{,}5(u-v)$. Поэтому $3(u+v)=4{,}5(u-v)$, откуда $u=5v$ и $s=3\times 6v=18v$. Таким образом, плот проплывет это расстояние со скоростью v за 18 часов.

13.11. Скорость велосипедиста при попутном ветре, согласно условию задачи, равна $\frac{1}{3}$ км/мин, а при встречном ветре — $\frac{1}{5}$ км/мин. Тогда собственная скорость велосипедиста равна полусумме двух указанных скоростей (см. решение задачи 13.9), а именно величине $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{15}=$ $=\frac{1}{3\frac{3}{4}}$ км/мин, откуда получаем, что велосипедист в безветренную погоду проезжает 1 км за 3 минуты 45 секунд (но вовсе не за 4 минуты, как может показаться на первый взгляд!).

13.12. Пусть по пути в одну сторону автобус поднимается в гору на участках одного типа суммарной длины s_1, а спускается с горы на участках другого типа суммарной длины s_2. Тогда по пути в обратную сторону он будет, наоборот, спускаться с горы на участках первого типа и подниматься в гору на участках второго типа. Поэтому на проезд туда и обратно автобус затратит в общей сложности количество часов, равное

$$\left(\frac{s_1}{30}+\frac{s_2}{60}\right)+\left(\frac{s_1}{60}+\frac{s_2}{30}\right)=\left(\frac{s_1}{30}+\frac{s_1}{60}\right)+\left(\frac{s_2}{60}+\frac{s_2}{30}\right)=$$
$$=(s_1+s_2)\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{60}\right)=(s_1+s_2)\frac{1}{20}=2.$$

Отсюда получаем, что длина пути s_1+s_2 между селениями равна 40 км.

13.13. Пусть эскалатор в неподвижном состоянии насчитывает x видимых ступенек. Обозначим через u нашу скорость, измеренную в таких необычных единицах, как ступеньки эскалатора в минуту, а через v скорость самого эскалатора в тех же единицах. Тогда, двигаясь в направлении движения эскалатора, вы находились на нем в течение $\frac{x}{u+v}$ минут, а двигаясь в обратном направлении,— в течение $\frac{x}{u-v}$ минут. Поэтому вы насчитали в первый раз $\frac{x}{u+v}\times u=30$ ступенек, а во второй раз $\frac{x}{u-v}\times u=150$ ступенек. Складывая равенства

$$\frac{x}{30}=\frac{u+v}{u},\qquad \frac{x}{150}=\frac{u-v}{u},$$

получаем $\frac{x}{30}+\frac{x}{150}=\frac{u+v+u-v}{u}=2$, откуда

$$x=\frac{2}{\frac{1}{30}+\frac{1}{150}}=\frac{2\times30\times150}{180}=50.$$

Таким образом, число видимых ступенек эскалатора в данном случае равно 50.

13.14. Данный пароход, вышедший из порта A, встретит во время плавания:

во-первых, 10 пароходов, которые ранее вышли из порта B и еще находятся в море;

во-вторых, тот пароход, который вышел из порта B одновременно с данным;

в-третьих, еще 10 пароходов, которые выйдут из порта B в последующие дни.

Итого данный пароход встретит 21 пароход. Разумеется, то же самое можно сказать и о любом другом из упомянутых пароходов.

13.15. На весь путь из пункта A в пункт B и обратно один поезд затрачивает 4 часа 44 минуты, не считая стоянок на конечных пунктах A и B. За это время из начального пункта A должны отправиться еще 14 поездов, последний из которых должен выйти через 4 часа 40 минут после выхода первого поезда. Очередной поезд из пункта A должен отправиться через 5 часов после выхода первого поезда, и этот рейс может осуществить первый поезд, если он потратит на стоянки в пунтах A и B в общей сложности 16 минут. Таким образом, для обслуживания линии при данных условиях достаточно иметь 15 поездов, а меньшим числом поездов обойтись нельзя.

13.16. Пусть O — точка пересечения хорд AC и BD (рис. 44). Тогда треугольник AOB подобен треугольнику DOC по двум углам: $\angle AOB = \angle DOC$ (вертикальные углы) и $\angle ABD = \angle ACD$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). Поэтому имеем равенство

$$\frac{AO}{DO} = \frac{AB}{DC},$$

в котором правая часть равна отношению скоростей катера и лодки. Следовательно, катер и лодка проходят расстояния AO и DO соответственно за одинаковое время. Таким образом, если бы они поменялись пунктами назначения, то оказались бы в точке O одновременно, т. е. попросту столкнулись бы.

13.17. Через t ч после начального момента первый корабль будет находиться от точки O на расстоянии $|100-30t|$ км, а второй — на расстоянии $|300-40t|$ км. По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника с вершинами в точках расположения кораблей и в точке O имеем, что квадрат расстояния между кораблями будет равен

$$(100-30t)^2+(300-40t)^2=(10\,000-6000t+900t^2)+$$
$$+(90\,000-24\,000t+1600t^2)=2500t^2-30\,000t+100\,000=$$
$$=(50t)^2-2\times 300\times 50t+300^2+10\,000=(50t-300)^2+100^2.$$

Анализ последнего выражения показывает, что наименьшее значение 100^2 оно принимает при $t=6$, следовательно, наименьшее расстояние между пароходами равно 100 км.

13.18. Рассмотрим движение одного корабля относительно другого и заметим, что оно является равномерным и прямолинейным, поскольку таковым является движение каждого из кораблей в отдельности. Таким образом, без ограничения общности можно считать, что один корабль покоится в некоторой точке A, а другой — точка B — движется по некоторой прямой линии со скоростью v (рис. 45). Опустим перпендикуляр AC на эту прямую и обозначим через a и b расстояния от кораблей до точки C в момент $t=6$. Тогда в любой момент t эти расстояния будут равны a и $|b-v(t-6)|$, а квадрат расстояния между кораблями будет равен

$$a^2+(b-v(t-6))^2.$$

Подставляя последовательно значения $t=6$, $t=13$, $t=17$, мы получим из условия задачи три уравнения:

$$a^2+b^2=20^2,\quad a^2+(b-7v)^2=15^2,$$
$$a^2+(b-11v)^2=13^2,$$

Из них находим (вычитая первое уравнение из двух других)

$$-14bv+49v^2=-175,\quad -22bv+121v^2=-231,$$

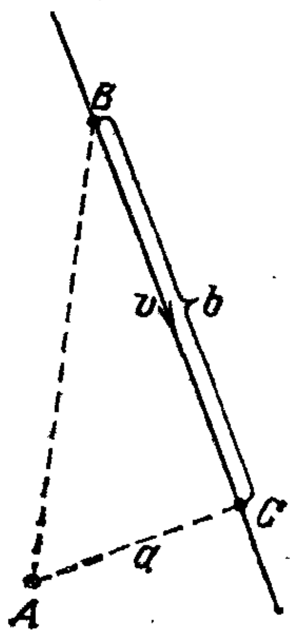
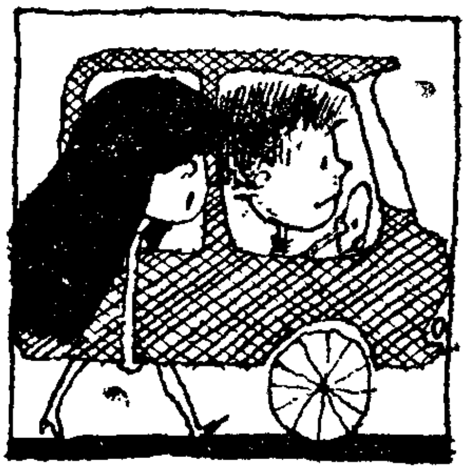


Рис. 45

откуда $v=1$, $b=16$ и $a=12$. Последнее значение как раз и задает наименьшее расстояние 12 км между кораблями.



§ 14. КАК БУДЕТ БЫСТРЕЕ!

Важное практическое значение имеют такие задачи на движение, в которых требуется выяснить, какой из способов передвижения является наиболее выгодным в сложившейся ситуации. Например, по какой реке — с быстрым или медленным течением — можно за меньшее время проплыть туда и обратно, как лучше организовать движение, чтобы максимально эффективно использовать имеющиеся транспортные средства, и т. п.?

Не всегда такие задачи бывают просты. При исследовании ответа на поставленные ниже вопросы советуем вам вдумываться в суть дела, отыскивать причины, оказывающие основное влияние на изучаемые характеристики движения. Заметим, что для нахождения наименьшего значения какой-либо величины, скажем времени движения, необходимо не только указать само это наименьшее значение и способ его достижения, но также и доказать, что меньше полученного значения эта величина быть не может.

14.1. Два туриста

По дороге идут два туриста. Один из них делает шаги на 10% короче и в то же время на 10% чаще, чем другой. Кто из туристов идет быстрее?

14.2. Всего на полминуты

Вы едете на автомобиле со скоростью 60 км/ч. На сколько нужно увеличить скорость вашего автомобиля, чтобы проезжать один километр пути на полминуты быстрее?

14.3. Зачем нужно соблюдать дистанцию?

По шоссе со скоростью 80 км/ч движется вереница машин. Расстояние между идущими друг за другом машинами равно примерно 15 м, а средняя длина машины составляет 5 м. Можно ли в целях безопасности движения потребовать, чтобы на более узком участке дороги, скажем на мосту, машины снижали скорость до 20 км/ч?

14.4. Какой способ лучше?

Попробуйте сообразить в уме, что быстрее: проехать весь путь на велосипеде или одну половину пути проехать на мотоцикле, двигаясь впятеро быстрее, чем на велосипеде, а другую половину пройти пешком, двигаясь вдвое медленнее, чем на велосипеде?

14.5. Половину пути или половину времени?

Что быстрее: половину пути пройти пешком, а другую половину проехать на машине или половину затраченного времени идти пешком, а другую половину ехать на машине?

14.6. Каков эффект от течения реки?

Два селения расположены на одном берегу реки. Из одного селения в другое отправляется посыльный, который должен получить там пакет и возвратиться назад. Посыльный может либо пройти весь путь туда и обратно пешком, либо проплыть этот путь по реке на лодке, собственная скорость которой равна скорости пешехода.

При каком способе передвижения посыльный возвратится раньше?

14.7. Вдвоем на одном велосипеде

Два туриста хотят добраться до селения, находящегося от них на расстоянии 30 км. Дело осложняется тем, что у них имеется только один (одноместный) велосипед. Как туристам нужно организовать движение, чтобы как можно быстрее им обоим добраться до селения? Скорость пешехода считайте равной 5 км/ч, а скорость велосипедиста 15 км/ч.

14.8. Втроем на двух велосипедах

Три туриста хотят добраться до селения, имея только два (одноместных) велосипеда. Как туристам нужно организовать движение, чтобы как можно быстрее всем троим добраться до селения?

14.9. Втроем на мотоцикле

Могут ли три туриста, имея один двухместный мотоцикл, преодолеть расстояние 60 км за три часа? Скорость пешехода считайте равной 5 км/ч, а скорость мотоциклиста 50 км/ч.

14.10. Пешком через пустыню

Путешественник хочет пересечь пустыню по заданному маршруту, имея возможность проходить ежедневно по 20 км и брать с собой в дорогу лишь трехдневный запас продовольствия, причем только в начальной точке маршрута. В конце дневных переходов он может устраивать склады с запасами продовольствия для использования их в будущем.

За какое наименьшее количество дней при этих условиях путешественник сможет пересечь пустыню по маршруту длиной 80 км? Сможет ли он пересечь пустыню за 15 дней, если маршрут имеет длину 100 км?

Решения

14.1. Первый из упомянутых туристов идет медленнее. Действительно, когда второй турист делает 10 своих шагов длины a каждый, первый турист делает 11 своих шагов длины $0{,}9a$ каждый. Таким образом, первый турист проходит расстояние $9{,}9a$ за то же время, за которое второй проходит большее расстояние $10a$.

14.2. Автомобиль, движущийся со скоростью 60 км/ч, проходит один километр пути за одну минуту. Для того чтобы проезжать этот километр на полминуты быстрее, автомобиль должен за ту же минуту проезжать не один, а два километра. Поэтому его скорость должна быть вдвое больше исходной, а значит, ее нужно увеличить на 60 км/ч.

14.3. Вначале скорость вереницы машин равна 80 км/ч, а на каждую машину приходится участок шоссе длиной

$15+5=20$ м. Подъезжая к мосту, каждая из машин замедлит свое движение, но каждая следующая машина сделает это несколько позже, а значит, расстояние между машинами на мосту уменьшится. Чтобы подсчитать, на каком расстоянии друг от друга будут ехать машины, заметим, что при изменении их скоростей одна величина все же остается в среднем неизменной, а именно временной интервал между машинами, т. е. время, необходимое каждой следующей машине для того, чтобы занять место предыдущей. Поскольку на мосту скорости машин в $80/20=4$ раза уменьшатся, то и расстояния между ними также уменьшатся в 4 раза и будут равны примерно $20/4=5$ метрам. А так как сами машины имеют длину по 5 метров каждая, то это означает, что машины будут ехать вплотную, каковое движение практически не представляется возможным.

Из решения настоящей задачи будущие водители могут сделать для себя полезный вывод: при увеличении скорости движения машины нужно внимательно следить за расстоянием до впереди идущей машины на случай непредвиденного замедления ее скорости.

14.4. Для проезда всего пути на велосипеде потребуется меньше времени, так как столько же времени займет одно лишь прохождение половины пути пешком (с вдвое меньшей скоростью), к чему добавится время, необходимое для проезда половины пути на мотоцикле, положительное, каким бы малым оно не было (даже если скорость мотоцикла будет не в пять, а в любое число раз превышать скорость велосипеда).

14.5. Эта задача так же, как и задача 14.4, может быть решена в уме. Если идти пешком и ехать на машине одинаковое время, то путь, проделанный на машине, будет, конечно, большим, чем путь пройденный пешком. Следовательно, в этом случае на машине будет пройдено более половины всего пути, что, естественно, займет меньше времени, чем если бы на машине была пройдена ровно половина пути.

14.6. Пусть расстояние между селениями обозначено через s, скорость пешехода — через x (она же есть скорость лодки в стоячей воде), а скорость течения реки — через y. Тогда время, затраченное пешеходом на весь путь туда и обратно, равно $\frac{2s}{x}$, а время, необходимое в сумме для прохождения на лодке расстояния s как по течению, так и против течения реки, равно $\frac{s}{x+y}+\frac{s}{x-y}=\frac{2sx}{x^2-y^2}$. Последняя величина больше, чем первая, так как

$$\frac{2sx}{x^2-y^2} > \frac{2sx}{x^2} = \frac{2s}{x}.$$

Поэтому посыльный возвратится раньше в случае, если пойдет пешком.

Казалось бы, время возвращения посыльного должно быть одинаковым при передвижении как пешком, так и на лодке: ведь течение реки половину пути относит лодку назад, а другую половину — вперед. Однако положительное действие течения длится по времени меньше, чем отрицательное, а значит, общий эффект от влияния течения реки на время возвращения посыльного будет отрицательным.

14.7. Если один турист проедет на велосипеде половину пути, т. е. 15 км, за один час, оставит велосипед и дальше пойдет пешком в течение трех часов, то он доберется до селения за четыре часа. В этом случае другой турист, наоборот, первые три часа будет идти пешком и, дойдя до велосипеда, оставшееся расстояние до селения проедет на велосипеде, т. е. тоже доберется до селения за четыре часа. Итак, оба туриста, отправившись одновременно, доберутся до селения также одновременно.

Возможны различные способы организации движения туристов, но меньше чем за четыре часа туристы никак не смогут оба добраться до селения (один из них, конечно, может добраться и за два часа, но другой при этом потратит все шесть часов). Это можно объяснить тем, что в общей сложности (в сумме) туристы должны пройти расстояние $30+30=60$ км. Из этих 60 км на велосипеде можно проехать в общей сложности не более 30 км, а остальные 30 км нужно пройти пешком. Таким образом, суммарное время движения туристов не может быть меньше чем $\frac{30}{15}+\frac{30}{5}=8$ часов, а, значит, если нужно, чтобы оба туриста добрались до селения одновременно, то это может произойти не ранее чем через $\frac{8}{2}=4$ часа.

14.8. Движение можно организовать так. Два туриста отправляются на велосипедах, а третий пешком одновременно с ними. Первый турист проезжает две трети пути до селения, оставляет велосипед и далее идет до селения пешком. Второй турист проезжает треть пути, оставляет велосипед, далее проходит еще треть пути пешком и затем едет на велосипеде, оставленном первым туристом. Наконец, третий турист проходит треть пути пешком, а затем садится на велосипед, оставленный вторым туристом, и едет на нем до селения. Таким образом, каждый турист одну треть пути пройдет пешком и две трети проедет на велосипеде, следовательно, все трое прибудут в селение одновременно.

Докажем, что быстрее туристы никак не смогут все трое добраться до селения. Действительно, в сумме три туриста должны пройти утроенное расстояние до селения, причем на велосипедах можно проехать в общей сложности не более чем удвоенное расстояние до селения, так как велосипедов только два. Поэтому суммарное время движения туристов не может быть меньше, чем время проезда на велосипеде удвоенного пути плюс время прохождения пешком однократного пути. Поделив это суммарное время на троих, мы получим как раз то наименьшее время движения каждого туриста, которое будет реализовано при указанной выше организации движения.

14.9. Могут. Движение можно организовать так. Пусть двое туристов отправляются на мотоцикле, а третий турист идет пешком. Через час один турист слезает с мотоцикла и проходит оставшиеся 10 км за два часа пешком (50 км мотоцикл уже проехал за первый час). Другой же турист возвращается на мотоцикле назад и, встретив третьего туриста, подвозит его до конечного пункта. Докажем, что эта последняя операция, связанная с возвращением назад, займет не более двух часов. В самом деле, через час после начала движения расстояние между мотоциклистом и третьим туристом равно 45 км, а расстояние между третьим туристом и конечным пунктом равно 55 км. Даже если третий турист остановится и будет просто ждать мотоциклиста, и то общее расстояние 45+55=100 км мотоциклист преодолеет за два часа. Тем более это удастся сделать, если третий турист пойдет навстречу мотоциклисту, сократив тем самым суммарный его пробег.

14.10. Пусть длина маршрута равна 80 км и A, B, C, D, E — последовательные точки маршрута, отстоящие друг

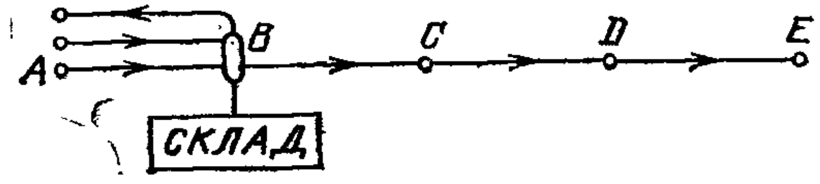
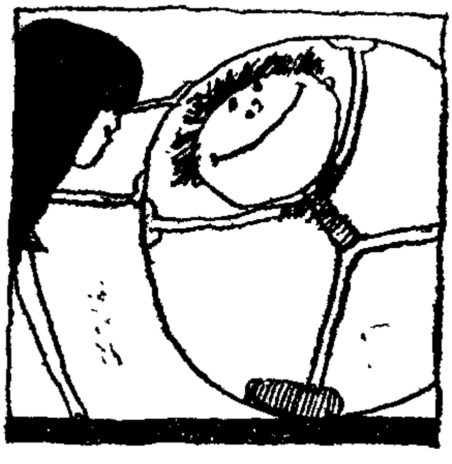


Рис. 46

от друга на расстояние 20 км, причем A — начальная, а E — конечная точка маршрута (рис. 46). Так как с трехдневным запасом продовольствия путешественник может пройти только 60 км, то ему придется хотя бы в одной из точек B, C или D устроить склад. Понятно, что первый раз склад может быть устроен только в точке B, поскольку, если его устроить в точке C или D, то путешественнику уже не хватит запаса продовольствия для возвращения назад в точку A за новой его порцией. Оставить в точке B он может только однодневный запас продовольствия, так как на путь от точки A до точки B и обратно путешественник тратит два дня. Если после этого он снова выйдет из точки A с трехдневным запасом продовольствия, то, дойдя до точки B и забрав находящийся там однодневный запас продовольствия, он дойдет до конечной точки E. Итак, наименьшее количество дней, необходимое путешественнику для прохождения маршрута в 80 км, равно шести.

Если маршрут имеет длину 100 км, то путешественник сможет пройти его за 15 дней следующим образом. За восемь дней он сделает в первой точке B, отстоящей от начальной точки A на 20 км, склад с четырехдневным запасом продовольствия. Затем путешественник заберет в точке A трехдневный запас и придет в точку B, имея там в общей сложности шестидневный запас продовольствия. Из предыдущего рассуждения в решении настоящей задачи нам известно, что за шесть дней путешественник сможет пройти 80 км. Итак, на весь путь ему понадобится $8+1+6=15$ дней (попробуйте доказать, что менее 15 дней ему не хватит).



§ 15. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Правильные многоугольники уже в глубокой древности считались символом красоты и совершенства. Это и понятно: ведь из всех многоугольников с заданным числом сторон наиболее приятен для глаза правильный многоугольник, у которого равны все стороны и равны все углы.

Практическая задача построения таких многоугольников с помощью циркуля и линейки имеет давнюю историю. Евклид в своем труде по геометрии приводит способы построения правильных треугольника, четырехугольника (квадрата), пятиугольника и пятнадцатиугольника, а также всех многоугольников, которые получаются из них удвоением числа сторон (не обязательно однократным). Следовательно, древние греки могли строить правильные многоугольники с числом сторон, равным

$$3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 15,\ 16,\ \ldots$$

Долгое время математиков особенно занимал вопрос о построении правильного семиугольника. Лишь в 1796 г. К. Ф. Гаусс доказал принципиальную невозможность этого построения с помощью только циркуля и линейки. Более того, им было доказано, что среди правильных многоугольников с нечетным числом сторон построить можно только такие, для которых число сторон является либо простым числом вида $2^{2^m}+1$, $m=0, 1, 2, \ldots$ (которых в настоящее время известно всего пять: 3, 5, 17, 257 и 65 537), либо произведением нескольких таких различных чисел. Таким образом, начатый выше список нельзя дополнить числами 7, 9, 11, 13, 14, а можно лишь продолжить следующим образом:

$$17,\ 20,\ 24,\ 30,\ 32,\ 34,\ 40,\ 48,\ 51,\ 60,\ 64,\ 68,\ 80,\ 85,\ 96,\ \ldots$$

(заметим, что правильные многоугольники со слишком большим числом сторон по внешнему виду мало отличаются от обыкновенной окружности).

В настоящем параграфе мы предлагаем вам самим поискать способы построения правильных многоугольников, вписанных в данную окружность или имеющих заданную сторону. Не менее важное практическое значение имеют методы приближенного построения в тех случаях, когда точное построение циркулем и линейкой неосуществимо.

15.1. Вписанный n-угольник

Докажите, что для построения правильного n-угольника, вписанного в данную окружность, достаточно разделить эту окружность на n равных частей и полученные точки деления последовательно соединить хордами. Как можно приближенно разделить окружность на заданное число равных дуг?

15.2. Сокращение числа сторон

Дан правильный многоугольник, число сторон которого представляет собой произведение натуральных чисел k и m, где $m>2$. Как построить правильный m-угольник?

15.3. Удвоение числа сторон

В окружность вписан правильный многоугольник. Постройте правильный многоугольник, у которого число сторон вдвое больше, чем у исходного.

15.4. Заданный треугольник

Постройте правильный треугольник со стороной, равной заданному отрезку.

15.5. Вписанный шестиугольник

Впишите в данную окружность правильный шестиугольник.

15.6. Заданный шестиугольник

Постройте правильный шестиугольник, со стороной, равной заданному отрезку.

15.7. Вписанный треугольник

Впишите в данную окружность правильный треугольник.

15.8. Заданный квадрат

Постройте квадрат со стороной, равной заданному отрезку.

15.9. Вписанный квадрат

Впишите в данную окружность квадрат.

15.10. Вписанный восьмиугольник

Впишите в данную окружность правильный восьмиугольник.

15.11. Вписанный двенадцатиугольник

Впишите в данную окружность правильный двенадцатиугольник.

15.12. Вписанный шестнадцатиугольник

Впишите в данную окружность правильный шестнадцатиугольник.

15.13. Заданный восьмиугольник

Постройте правильный восьмиугольник со стороной, равной заданному отрезку.

15.14. Заданный двенадцатиугольник

Постройте правильный двенадцатиугольник со стороной, равной заданному отрезку.

15.15. Заданный шестнадцатиугольник

Постройте правильный шестнадцатиугольник со стороной, равной заданному отрезку.

15.16. «Золотое сечение»

Разделите отрезок на такие две неравные части, чтобы квадрат большей из них был равен произведению длины всего отрезка и меньшей его части.

15.17. Десятиугольник

Докажите, что сторона правильного вписанного в окружность десятиугольника равна большей части «золотого сечения» радиуса этой окружности. Впишите в данную окружность правильный десятиугольник.

15.18. Вписанный пятиугольник

Впишите в данную окружность правильный пятиугольник.

15.19. Звезда

Как построить пятиконечную звезду?

15.20. Пятнадцатиугольник

Впишите в данную окружность правильный пятнадцатиугольник.

15.21. Заданный пятиугольник

Постройте правильный пятиугольник со стороной, равной заданному отрезку.

15.22. Приближенное построение семиугольника

Нарисуем окружность и впишем в нее правильный треугольник. Затем, начиная от одной его вершины, последовательно сделаем на окружности шесть засечек раствором циркуля, равным половине стороны треугольника, и построим семиугольник с вершинами в полученных шести точках и в исходной точке.

Насколько точен предложенный способ построения правильного семиугольника?

15.23. Приближенное построение девятиугольника

Проведем окружность большого радиуса с центром в точке O (рис. 47), которую разделим на шесть равных частей точками A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. С центрами в точках A_2, A_4 и A_6 проведем дуги окружностей того же радиуса, образующие фигуру из трех «лепестков». Радиус A_1O разделим на три части и через ближайшую к точке O точку деления проведем прямую, перпендикулярную этому радиусу. Отрезок ее BC, содержащийся внутри лепестка, примем за сторону девятиугольника, вписанного в окружность радиуса OB.

Насколько точен предложенный способ построения правильного девятиугольника?

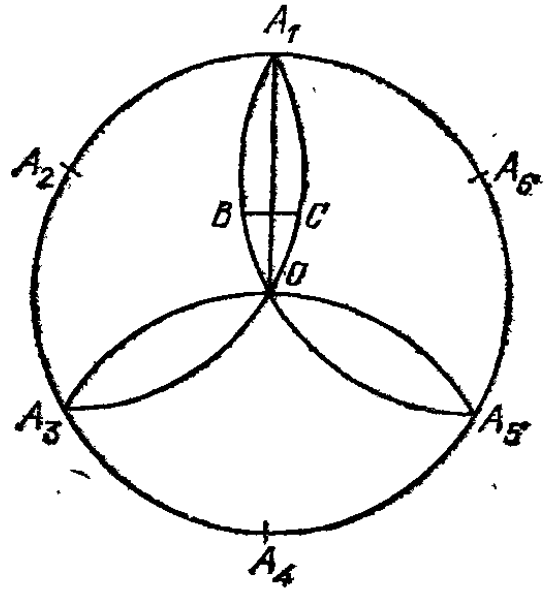


Рис. 47

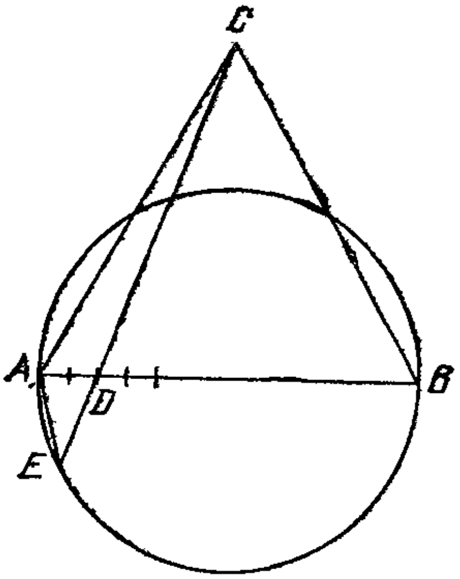


Рис. 48

15.24. Приближенное построение n-угольника

На диаметре AB данной окружности как на стороне построим правильный треугольник ACB (рис. 48). Возьмем на отрезке AB точку D так, чтобы выполнялось равенство

$$AD = \frac{2}{n} AB.$$

Продолжим отрезок CD до пересечения его с окружностью в точке E. Хорду AE примем за сторону n-угольника, вписанного в данную окружность.

Насколько точен предложенный способ построения правильного n-угольника?

Решения

15.1. Если все n сторон вписанного n-угольника стягивают равные дуги окружности, то сами стороны равны между собой. Кроме того, в этом случае каждый из углов между соседними сторонами n-угольника является вписанным и опирается на дугу, составленную из n—2 упомянутых одинаковых дуг. Следовательно, все эти углы также равны между собой. Таким образом, задача построения вписанного правильного n-угольника сведена к делению окружности на n равных дуг.

Если под рукой имеется транспортир, то с его помощью можно начертить центральный угол, равный $\frac{360^\circ}{n}$. Отложив один такой угол от какого-нибудь радиуса OA_1, мы получим радиус OA_2. Отложив от него еще один такой же угол, мы получим следующий радиус OA_3 и т. д. Точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ будут делить окружность на n частей, а уж в какой степени эти части окажутся равными, будет зависеть от точности, с которой откладывались требуемые центральные углы.

При отсутствии транспортира можно применить следующий способ приближенного деления окружности на заданное число n равных частей с помощью циркуля. Выберем раствор циркуля на глаз таким, чтобы он примерно соответствовал расстоянию между соседними вершинами будущего n-угольника, и отложим от любой точки A_0 на окружности n растворов циркуля в определенном направлении, получив последовательно точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Если точки A_0 и A_n практически совпадают, то раствор циркуля выбран нами уже достаточно точно. Если же эти точки сколь-нибудь заметно различаются, то дугу A_0A_n разделим на n примерно равных частей и отметим ту точку деления A_0', которая расположена ближе всего к точке A_0 (рис. 49). Подправим раствор циркуля так, чтобы он соответствовал расстоянию между точками A_0' и A_1, и повторим все сначала, отложив n растворов циркуля от точки A_0' и получив точки A_1', A_2', $\ldots$, A_n'. Сравнив точки A_0' и A_n', мы опять выясним, достаточно ли точным оказался раствор циркуля. Если еще нет, то подправим его еще раз и т. д. до тех пор, пока нужная точность не будет достигнута.

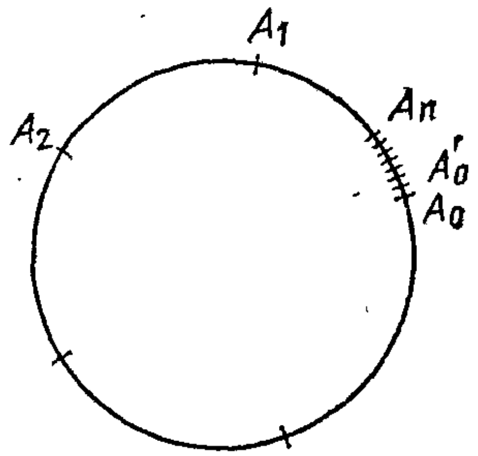


Рис. 49

15.2. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_{km}$ — последовательные вершины исходного многоугольника. Тогда многоугольник с вершинами $A_m, A_{2m}, \ldots, A_{km}$ будет правильным, поскольку эти вершины лежат на одной окружности (описанной около исходного многоугольника) и делят ее на равные дуги.

15.3. Проведем к каждой стороне данного многоугольника свой серединный перпендикуляр до его пересечения с дугой окружности, стягиваемой этой стороной. Так как полученные точки пересечения разделят каждую из дуг на две равные части, то эти точки вместе с вершинами исходного многоугольника образуют вершины требуемого многоугольника.

15.4. Пусть AB — заданный отрезок. Проведем две дуги окружностей с центрами в точках A и B и радиусом AB до пересечения их в точке C. Соединив точки A и B с точкой C, получим требуемый правильный треугольник ABC.

15.5. Возьмем на данной окружности с центром O произвольную точку A и раствором циркуля, равным OA, отложим на окружности последовательно еще пять точек B, C, D, E и F. Точки A, B, C, D, E и F являются вершинами правильного шестиугольника. В самом деле, соединив эти точки последовательно друг с другом и с точкой O, мы получим пять равносторонних треугольников (рис. 50). Так как каждый из углов AOB, BOC, COD, DOE, EOF равен по $60°$, то угол AOF также равен $60°$, а, значит, окружность разделена на шесть равных дуг.

15.6. Раствором циркуля, равным длине данного отрезка, проведем окружность. Вписав в эту окружность шестиугольник способом, предложенным в решении задачи 15.5, мы получим правильный шестиугольник с заданной стороной.

15.7. Разделим данную окружность на шесть равных частей (см. задачу 15.5) и точки деления через одну последовательно соединим хордами. Получим правильный треугольник (см. задачу 15.2).

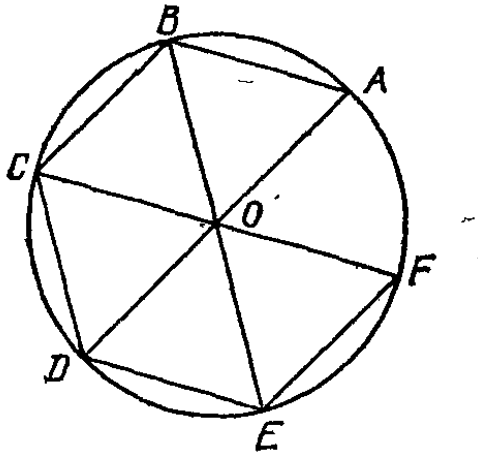


Рис. 50

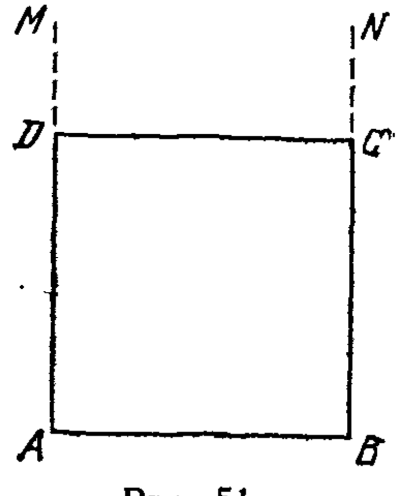


Рис. 51

15.8. Из концов данного отрезка AB восставим перпендикуляры AM и BN по одну сторону от отрезка AB (рис. 51) и отложим на них соответственно отрезки AD и BC, равные отрезку AB. Соединив точки C и D, получим квадрат $ADCB$. В самом деле, четырехугольник $ADCB$ является параллелограммом (ибо его стороны AD и BC равны и параллельны), ромбом (ибо $AB=BC$) и прямоугольником (ибо $\angle ABC=90°$), а значит, квадратом.

15.9. Через центр окружности проведем два взаимно перпендикулярных диаметра AC и BD и их концы последовательно соединим хордами. Получим вписанный квадрат $ABCD$. Действительно, дуги AB, BC, CD и AD равны между собой, поскольку на них опираются равные центральные углы в 90° каждый.

15.10. Впишем в данную окружность квадрат (см. задачу 15.9) и удвоим число его сторон (см. задачу 15.3).

15.11. Удвоив число сторон правильного вписанного в данную окружность шестиугольника, мы получим правильный двенадцатиугольник, вписанный в ту же окружность (см. задачи 15.5 и 15.3).

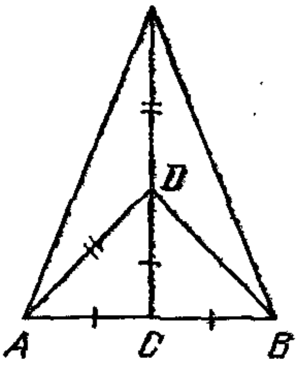


Рис. 52

15.12. Удвоив число сторон правильного вписанного в данную окружность восьмиугольника, мы получим правильный шестнадцатиугольник, вписанный в ту же окружность (см. задачи 15.10 и 15.3).

15.13. Из середины C данного отрезка AB (рис. 52) восставим перпендикуляр и отложим на нем отрезок CD, равный $\frac{1}{2}AB$. Затем на его продолжении отложим отрезок DO, равный AD. Тогда отрезок AO является радиусом окружности, описанной около правильного восьмиугольника со стороной AB.

В самом деле, найдем величину угла AOC. Так как $AC=CD$, то треугольник ACD равнобедренный, и так как он прямоугольный, то угол ADC равен 45°. Поскольку $AD=DO$, то треугольник ADO равнобедренный и угол AOD равен $\frac{45°}{2}$ и, следовательно, угол AOB равен 45°, т. е. дуга AB есть $\frac{1}{8}$ часть окружности.

Теперь на окружности радиуса AO от любой точки последовательно отложим семь дуг, каждая из которых равна дуге AB. Получим вершины правильного восьмиугольника.

15.14. Построим равносторонний треугольник ACB со стороной, равной данному отрезку AB. Через точку C проведем прямую, перпендикулярную отрезку AB. Отложим на этой прямой отрезок CO, равный AB (рис. 53). Тогда отрезок AO является радиусом окружности, описанной около правильного двенадцатиугольника со стороной AB. Для подтверждения этого достаточно доказать, что угол AOB равен $30°$. Точка C равноудалена от точек A, B и O, т. е. является центром окружности, описанной около треугольника AOB. Поэтому $\angle AOB = \frac{1}{2} \angle ACB = 30°$.

Теперь на окружности радиуса AO от любой точки последовательно отложим 11 дуг, каждая из которых равна дуге AB. Получим вершины правильного двенадцатиугольника.

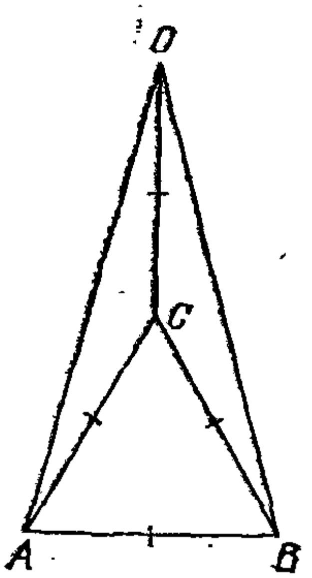


Рис. 53

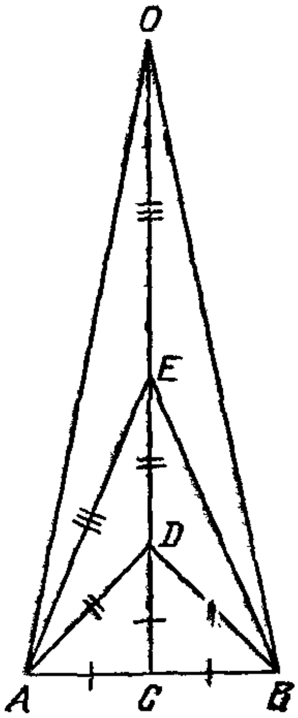


Рис. 54

15.15. Из середины C отрезка AB восставим перпендикуляр (рис. 54) и на нем отложим отрезок CD, равный $\frac{1}{2} AB$, затем отрезок DE, равный AD, и отрезок EO, равный AE. Тогда отрезок AO является радиусом окружности, описанной около правильного шестнадцатиугольника со стороной AB.

Так же как и в задаче 15.13, находим, что

$$\angle AEB = \frac{1}{2} \angle ADB = 45°,$$

$$\angle AOB = \frac{1}{2} \angle AEB = \frac{45°}{2}, \quad \text{т. е.} \quad \angle AOB = \frac{360°}{16}.$$

Построение правильного шестнадцатиугольника выполняется аналогично построению в предыдущих задачах.

Теперь на окружности радиуса AO от любой точки последовательно отложим 15 дуг, каждая из которых равна дуге AB. Получим вершины правильного шестнадцатиугольника.

15.16. Пусть заданный отрезок AB имеет длину a. Найдем длину x большей части «золотого сечения» отрезка AB. Из пропорции

$$a : x = x : (a-x)$$

получаем

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2} = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}.$$

Следовательно, задача сводится к построению отрезка указанной длины x по отрезку длины a. Число $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$ равно длине гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами a и $\frac{a}{2}$, который можно построить с помощью циркуля и линейки. Для получения отрезка длины $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}$ достаточно из гипотенузы построенного треугольника вычесть отрезок длины $\frac{a}{2}$. Следовательно, построение «золотого сечения» отрезка AB можно произвести следующим образом (рис. 55):

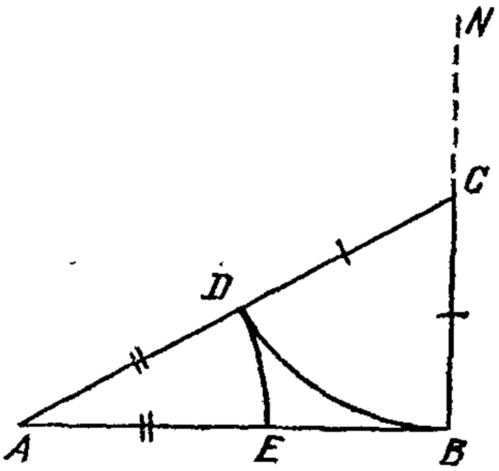


Рис. 55

1) из точки B восставим перпендикуляр BN к отрезку AB, на нем отложим отрезок BC длины $\frac{1}{2}AB$;

2) соединим точки A и C и отложим на отрезке AC отрезок DC длины BC;

3) отложим на отрезке AB отрезок AE длины AD, тогда точка E делит отрезок AB в «золотом сечении».

15.17. Пусть AB — сторона правильного вписанного в окружность десятиугольника. Тогда $\angle AOB = 36°$, а каждый из углов OAB и ABO равен 72° (рис. 56). Проведем биссектрису AC угла A треугольника AOB. Так как $\angle ACB = 72°$, то из равнобедренных треугольников ABC и ACO получим $AB = AC = OC$.

По свойству биссектрисы треугольника имеем $OC : BC = AO : AB$. Поскольку $AO = OB$, $AB = OC$, то $OC : BC =$

$=OB : OC$, т. е. $OC^2=BC \times OB$, а это и означает, что радиус OB разделен точкой C в «золотом сечении», причем OC — бо́льшая часть радиуса (ибо $\angle ACB > \angle BAC$, откуда $OC = AB > BC$).

Таким образом, разделив радиус OB данной окружности в «золотом сечении» (см. задачу 15.16) и взяв бо́льшую его часть OC, мы найдем длину стороны AB правильного вписанного в эту окружность десятиугольника. Теперь от любой точки данной окружности последовательно отложим девять хорд, каждая из которых равна AB. Один из конкретных способов построения стороны $OC=AB$ требуемого десятиугольника приведен на рис. 57.

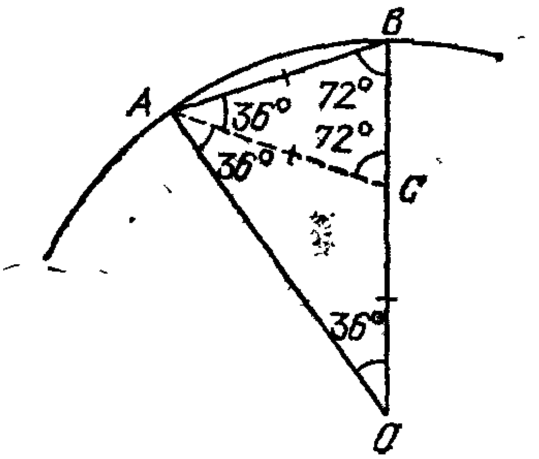


Рис. 56

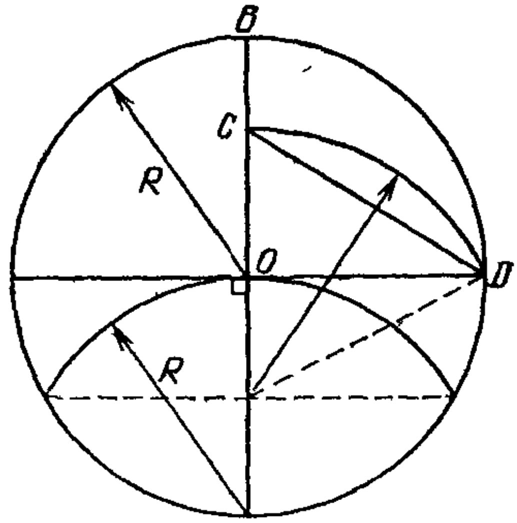


Рис. 57

15.18. Разделим данную окружность на 10 равных частей (см. задачу 15.17). Тогда точки деления, взятые через одну, являются вершинами правильного пятиугольника (см. задачу 15.2). Впрочем, на рис. 57, где построен отрезок OC, равный стороне правильного вписанного десятиугольника, имеется и отрезок CD, равный стороне требуемого пятиугольника.

15.19. Нарисуем некоторую окружность, разделим ее на 5 равных частей (см. задачу 15.18) и соединим точки деления через одну хордами друг с другом, как указано на рис. 58.

15.20. Поскольку $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$, то, отняв от дуги, равной $\frac{1}{6}$ окружности, дугу, равную $\frac{1}{10}$ окружности, мы получим остаток, равный $\frac{1}{15}$ окружности. Это наблюдение позволяет вписать в окружность правильный пятнадцатиугольник (способы деления окружности на 6 и 10 частей описаны в задачах 15.5 и 15.17).

15.21. Из конца A и середины C заданного отрезка AB восставим перпендикуляры AN и CM и проведем окружность с центром A и радиусом AB (рис. 59). Отложим на перпендикуляре AN отрезок AD длины AC и проведем отрезок BD. Отложим на отрезке BD отрезок DE длины AD и проведем окружность с центром B и радиусом BE до пересечения с первой окружностью в точке F. На прямой AF построим точку G на расстоянии AB от точки B. Тогда центр O окружности, описанной около правильного пятиугольника со

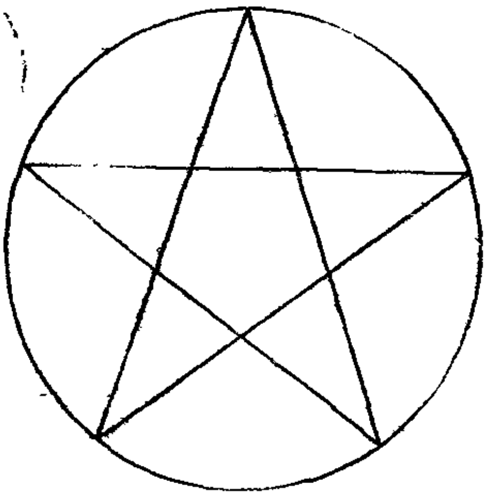


Рис. 58

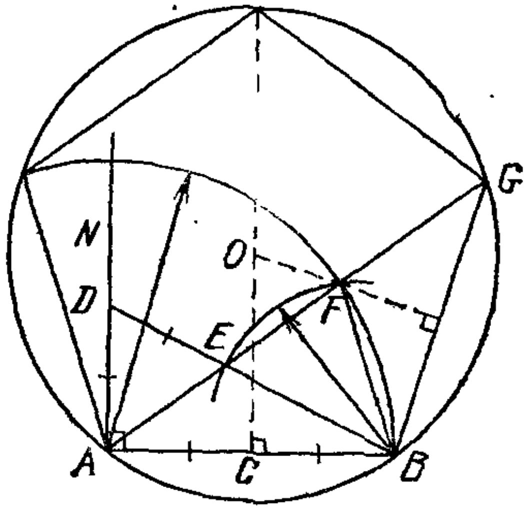


Рис. 59

стороной AB, лежит на пересечении прямой CM с серединным перпендикуляром к отрезку BG. Действительно, окружность, описанная около треугольника ABG, является описанной и около требуемого пятиугольника, так как вписанный угол BAG равен центральному углу BAF, опирающемуся на сторону FB десятиугольника, вписанного в первую окружность (см. задачу 15.17), и, следовательно, равному 36°. Поэтому углы BOG и AOB равны 72° каждый. Остальные две вершины пятиугольника лежат на пересечениях описанной окружности с перпендикуляром CM и с первой окружностью соответственно.

15.22. Построенный семиугольник не является правильным. В самом деле, пусть O — центр окружности, точка D — середина стороны AB правильного треугольника, а точка E — первая из засечек, сделанных на окружности радиусом $AD=\frac{1}{2}AB$ (рис. 60). Найдем величину α угла AOE. Пусть R — радиус окружности, тогда $AE=AD=\frac{\sqrt{3}}{2}R$. Из равнобедренного треугольника AOE имеем

$$AE=2R\sin\frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{AE}{2R}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

По таблицам синусов находим, что

$$51^\circ 19' < \alpha < 51^\circ 20'.$$

Центральный угол β опирающегося на сторону правильного семиугольника равен $360^\circ/7$, т. е.

$$51^\circ 25' < \beta < 51^\circ 26'.$$

Следовательно, построенный семиугольник не является правильным. Однако из приведенных неравенств следует, что

$$5' < \beta - \alpha < 7',$$

а значит, в результате шести откладываний дуги AE на окружности погрешность построения хотя и будет накапливаться, но не превзойдет $6(\beta-\alpha) < 42' < 1^\circ$. Таким образом, описанный способ позволяет строить «практически правильный» семиугольник.

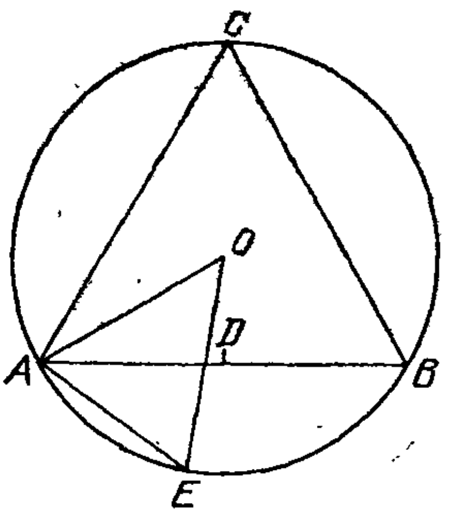


Рис. 60

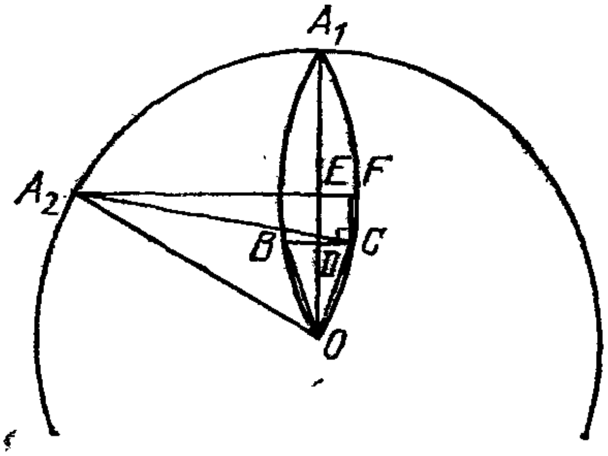


Рис. 61

15.23. Пусть D — точка пересечения отрезков BC и OA_1, E — середина отрезка OA_1, а CF — перпендикуляр к прямой A_2E (рис. 61). Тогда если $OA_1=R$, то $OD=\frac{R}{3}$, $OE=\frac{R}{2}$, $DE=\frac{R}{6}$, а из прямоугольных треугольников A_2OE и A_2CF имеем

$$A_2E=R\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad A_2F=R\frac{\sqrt{25}}{6},$$

откуда получаем

$$\operatorname{tg} \angle COD = \frac{DC}{OD} = \frac{A_2F - A_2E}{OD} = 3\left(\frac{\sqrt{35}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

По таблицам тангенсов находим

$$\angle COD \approx 19°48',$$

поэтому центральный угол BOC, который должен составлять у правильного девятиугольника 40°, в нашем случае отличается от нужного значения не более чем на 25′. При этом погрешность у остальных углов также не превосходит 25′: два других «лепестка» дают такие же углы, а углы между «лепестками» просто делятся пополам, отчего погрешность лишь уменьшается в два раза. Таким образом, полученный девятиугольник является «практически правильным».

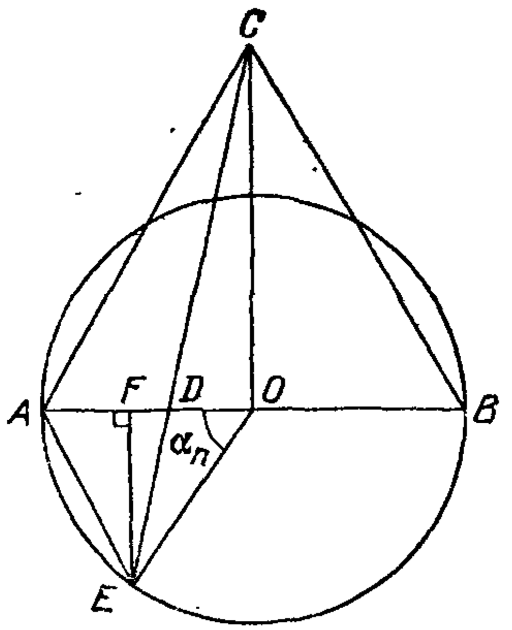


Рис. 62

15.24. Заметим, что при $n=3$, 4, 6 предложенный метод дает правильные n-угольники. Пусть O — центр данной окружности, R — ее радиус, EF — перпендикуляр к диаметру AB (рис. 62). Тогда при $n>4$ справедливы равенства

$$AD = \frac{2}{n} AB = \frac{4R}{n}, \quad OD = AO - AD = R\left(1 - \frac{4}{n}\right).$$

Для угла $\alpha_n = \angle AOE$ имеем

$$EF = R\sin\alpha_n, \quad OF = R\cos\alpha_n,$$

$$OC = R\sqrt{3}, \quad FD = OF - OD = R\cos\alpha_n - R\left(1 - \frac{4}{n}\right),$$

а из подобия треугольников DOC и DFE получаем

$$\frac{R\sin\alpha_n}{R\sqrt{3}} = \frac{R\cos\alpha_n - R\left(1 - \frac{4}{n}\right)}{R\left(1 - \frac{4}{n}\right)},$$

откуда после преобразований находим

$$\cos\alpha_n = \frac{(n-4)\left(3n + \sqrt{n^2 + 16n - 32}\right)}{4n^2 - 8n + 16}.$$

Подставляя в эту формулу значения $n=5, 7, 8, 9, 10$, получаем следующие углы:

$$\alpha_5 = \arccos \frac{15+\sqrt{73}}{76} \approx 71°57',$$

$$\alpha_7 = \arccos \frac{3(21+\sqrt{129})}{156} \approx 51°31',$$

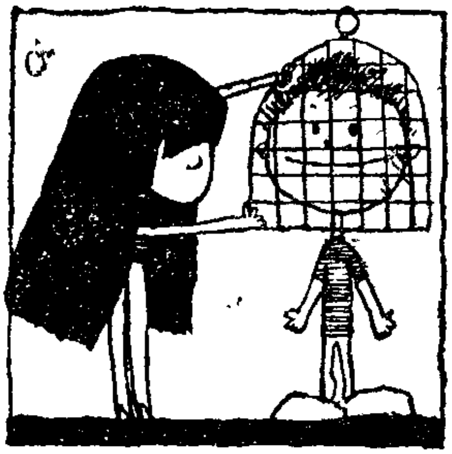
$$\alpha_8 = \arccos \frac{4(24+\sqrt{160})}{208} \approx 45°11',$$

$$\alpha_9 = \arccos \frac{5(27+\sqrt{193})}{268} \approx 40°17',$$

$$\alpha_{10} = \arccos \frac{6(30+\sqrt{228})}{336} \approx 36°21'.$$

Сравнение с истинными значениями центральных углов, каковыми являются соответственно углы $72°$, $51\frac{3}{7}° \approx$ $\approx 51°26'$, $45°$, $40°$, $36°$, показывает, что при $n \leqslant 7$ метод дает исключительно высокую точность, а с ростом n погрешность растет. Однако преимущество этого метода состоит в том, что его можно единообразно использовать при различных значениях n.

§ 16. ПОСТРОЕНИЯ НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ



С бумагой в клетку каждый из вас имеет дело практически с первых дней изучения математики, а может быть, и раньше. Однако вы вряд ли представляете себе, насколько мощным инструментом для геометрических построений является наличие на бумаге квадратной сетки.

Условимся, пользуясь вольностью речи, разделять линии сетки на два вида: горизонтальные и вертикальные. Горизонтальными будем считать все параллельные линии сетки, имеющие какое-то фиксированное направление, а вертикальными — все остальные параллельные линии сетки, перпендикулярные горизонтальным. Точки пересечения линий сетки будем называть *узлами*, а расстояние между соседними узлами на одной линии — *шагом сетки*, причем по определению длину шага примем за единицу.

Важную роль при построениях на клетчатой бумаге играет возможность расположить фигуру так, чтобы все ее вершины или как можно большее их количество оказались в узлах сетки. В таких случаях построение некоторых точек фигуры иногда можно выполнить без каких-либо чертежных инструментов, а лишь с помощью подсчета числа шагов вдоль линий сетки. Заметим, что любой отрезок с концами в узлах сетки задается двумя своими проекциями — горизонтальной и вертикальной (т. е. его проекциями на некоторые горизонтальную и вертикальную линии сетки соответственно).

При решении задач настоящего параграфа стоит задумываться о том, чтобы предложенные вами способы построения использовали минимум технических средств. Если уж вам приходится применять, скажем, линейку, то только для проведения прямых линий между двумя заданными точками, но никак не для измерения расстояний между этими точками. Ну и, конечно, никому еще не повредило умение делать рисунки на бумаге от руки, даже рисовать окружности — и в этом деле, как мы увидим ниже, также помогает знание математики.

16.1. Середина отрезка

На клетчатой бумаге нарисован отрезок, концы которого находятся в узлах сетки. Вам нужно найти его середину. Укажите, при каких положениях отрезка это можно сделать, не проводя дополнительных линий, а используя лишь точки пересечения отрезка с линиями сетки?

Как с помощью линейки найти середину отрезка при других его положениях?

16.2. Симметрия относительно точки

Как проще всего найти точку, симметричную данному узлу сетки относительно другого данного узла сетки?

Будет ли эта точка также узлом сетки?

16.3. На *n* частей

Как разделить на заданное число *n* равных частей данный отрезок с концами в узлах сетки, пользуясь разве только линейкой?

16.4. Медианы треугольника

В данном треугольнике с вершинами в узлах сетки проведите медианы, пользуясь одной лишь линейкой.

Обязательно ли точка пересечения медиан является узлом сетки?

16.5. Параллельный перенос

Точки A, B и C находятся в узлах сетки. Не проводя никаких линий, параллельно перенесите точку C на вектор $\overrightarrow{AB}$.

Будет ли полученная в результате точка узлом сетки?

16.6. Середина третьей стороны

Докажите, что если какая-то вершина треугольника и середины двух прилежащих к ней сторон находятся в узлах сетки, то и середина третьей стороны также совпадает с одним из узлов сетки.

16.7. Параллельные прямые

Через заданный узел сетки с помощью одной линейки проведите прямую, параллельную данной прямой, проходящей через два данных узла сетки. Отразите проведенную прямую симметрично относительно той же данной прямой.

16.8. Поворот на 90°

Не проводя никаких линий, найдите точку, которая получится, если повернуть данный узел сетки вокруг другого данного узла сетки на угол 90°.

16.9. Вершины квадрата

Докажите, что если две заданные соседние вершины квадрата находятся в узлах сетки, то и остальные две его вершины также должны находиться в узлах сетки.

Найдите эти вершины, не проводя никаких линий.

16.10. Перпендикуляр к прямой

С помощью одной линейки через заданный узел сетки проведите прямую, перпендикулярную данному отрезку с концами в узлах сетки.

16.11. Симметрия относительно прямой

Пользуясь одной лишь линейкой, отразите симметрично заданный узел сетки относительно данной прямой, проходящей через два данных узла сетки. Будет ли полученная в результате точка узлом сетки?

16.12. Рациональный тангенс

Докажите, что проходящая через некоторый узел сетки прямая содержит еще хотя бы один узел тогда и только тогда, когда она образует с какой-нибудь линией сетки угол, тангенс которого является рациональным числом.

16.13. Без транспортира

Найдите величину угла ABC, изображенного на рис. 63. Пользуясь полученным значением, сообразите в уме, чему равна сумма $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

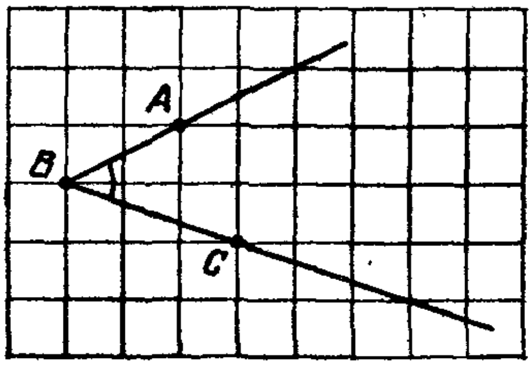


Рис. 63

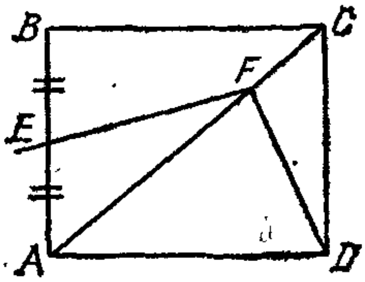


Рис. 64

16.14. С помощью клетчатой бумаги

На середине стороны AB квадрата $ABCD$ взята точка E, а на диагонали AC — точка F, делящая диагональ в отношении $AF:FC=3:1$ (рис. 64). Найдите угол DFE и отношение $DF:FE$.

16.15. Геометрия помогает тригонометрии

Расположив на клетчатой бумаге угол DFE, описанный в задаче 16.14 и изображенный на рис. 64, подберите на луче FE несколько узлов сетки так, чтобы продемонстрировать равенства

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7},$$

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{1}{13}=\operatorname{arctg}\frac{1}{3},$$

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}.$$

16.16. Тангенсы углов треугольника

Докажите, что если вершины треугольника лежат в узлах сетки, то тангенс любого непрямого угла этого треугольника является рациональным числом.

16.17. Другие повороты

Прямая проходит через два заданных узла сетки. Предложите способ, как повернуть указанную прямую вокруг одного из этих узлов на угол, тангенс которого равен данному рациональному числу.

16.18. Правильный треугольник

Докажите, что все вершины равностороннего треугольника не могут одновременно лежать в узлах сетки.

16.19. Правильный шестиугольник

Могут ли все вершины правильного шестиугольника одновременно лежать в узлах сетки?

16.20. Одной окружностью

Вы хотите разметить циркулем на клетчатой бумаге вершины правильного шестиугольника. Пользуясь циркулем, вы, конечно, всегда сможете это сделать на любой бумаге (см. задачу 15.5). Нельзя ли, однако, воспользоваться имеющейся сеткой с тем, чтобы после проведения специально подобранной вами окружности линии сетки сами указали вам на окружности вершины правильного шестиугольника?

16.21. Квадрат по трем линиям сетки

На клетчатой бумаге требуется разметить вершины квадрата таким образом, чтобы три из них лежали соответственно на трех заданных параллельных линиях сетки. Как это сделать, не проводя никаких дополнительных линий?

Можно ли, кроме того, обеспечить попадание также и четвертой вершины квадрата на какую-нибудь из трех указанных линий?

16.22. Правильный многоугольник

При каких значениях n все вершины правильного n-угольника могут одновременно лежать в узлах сетки?

16.23. С горизонтальной гипотенузой

Если вам приходилось рисовать на клетчатой бумаге прямоугольные треугольники, то, наверняка, порядком наскучило располагать их катеты по линиям сетки. Можно ли построить такой прямоугольный треугольник со всеми вершинами в узлах сетки, чтобы на линии сетки оказалась его гипотенуза?

Равнобедренный прямоугольный треугольник так расположить довольно несложно. Укажите способ построения всех таких треугольников.

16.24. Окружность от руки

Для проведения без циркуля какой-нибудь окружности на клетчатой бумаге, можно воспользоваться тем, что окружность с центром в узле сетки и радиусом 5 проходит через 12 узлов, изображенных на рис. 65. Докажите этот факт.

Существует ли окружность с центром в узле сетки и целым радиусом, меньшим 5, также содержащая более 4 узлов?

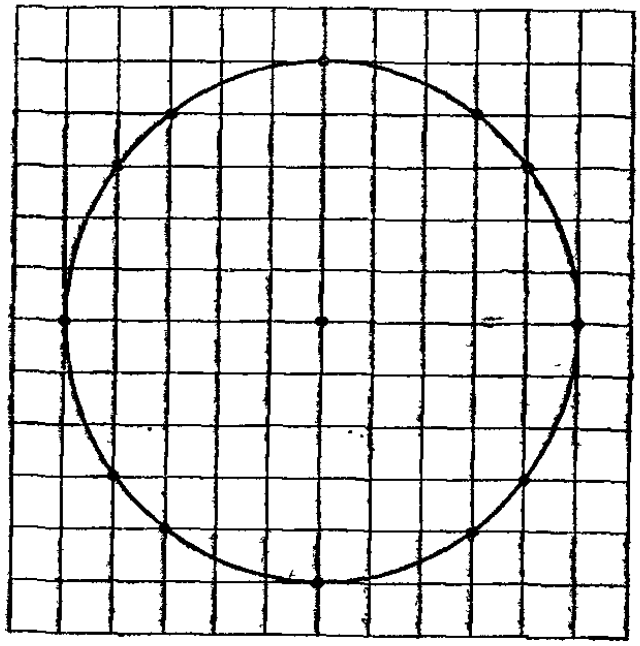


Рис. 65

16.25. Окружность с 20 узлами

Какого наименьшего целого радиуса должна быть окружность с центром в узле сетки, содержащая более 12 узлов? Нарисуйте хотя бы четверть этой окружности.

Решения

16.1. Если хотя бы одна из проекций данного отрезка AB — горизонтальная AC или вертикальная AD — имеет четную длину, не равную, однако, нулю, то середина E отрезка AB лежит на его пересечении с линией сетки, проходящей через середину F этой проекции перпендикулярно ей (рис. 66). Если обе указанные проекции имеют четную длину, то середина отрезка даже совпадает с некоторым узлом сетки (рис. 67). Если же ни одна из проекций не имеет четной положительной длины, то можно отступить от одного конца отрезка AB на несколько клеток в одну сторону, от другого конца на столько же клеток в противоположную сторону и провести прямую через полученные точки C и D (рис. 68). Точка E пересечения этой прямой с исходным отрезком и будет его серединой. Это вытекает из того факта, что четырехугольник $ADBC$ является параллелограммом, ибо имеет пару равных и параллельных противоположных сторон AC и DB (точки C и D, конечно, всегда можно выбрать не лежащими на прямой AB).

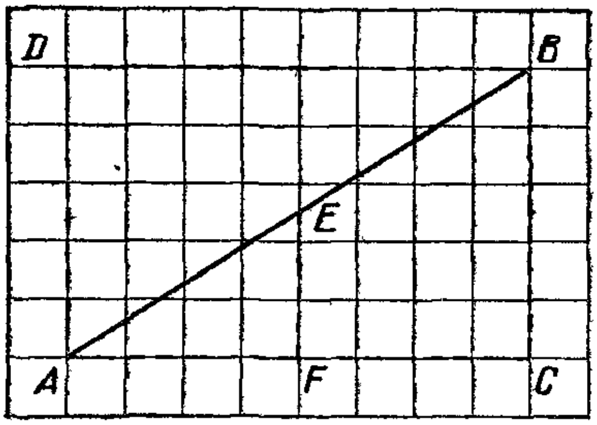


Рис. 66

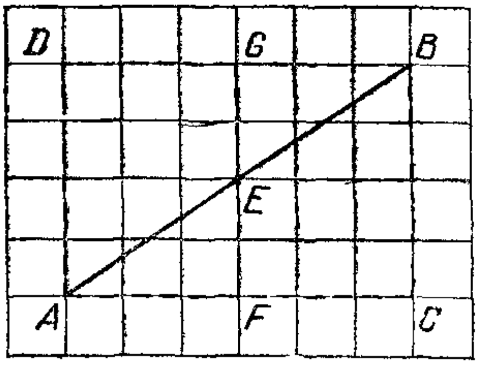


Рис. 67

16.2. Для того чтобы отразить узел A симметрично относительно узла E, достаточно сосчитать по клеточкам длину горизонтальной проекции AF отрезка AE и длину вертикальной проекции FE этого же отрезка. После этого останется отложить от точки E в вертикальном направлении точку G и от нее в горизонтальном направлении точку B так, чтобы выполнялись равенства $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{FE}$ и $\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{AF}$ (рис. 67). Симметричность точек A и B относительно точки E вытекает из равенства прямоугольных треугольников AFE и BGE (по двум катетам). Из построения ясно, что точка E обязательно является узлом сетки.

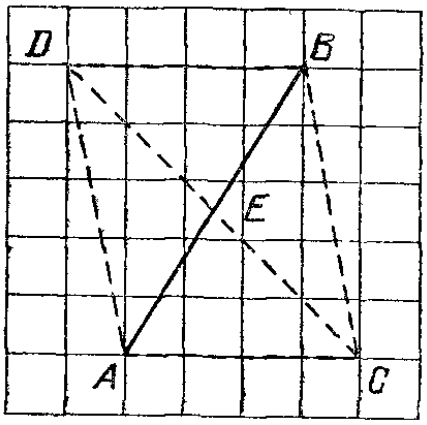


Рис. 68

16.3. Как и в задаче 16.1, ситуация сильно упрощается, если хотя бы одна из проекций данного отрезка AB положительна и кратна заданному числу n. В этом случае достаточно найти точки пересечения отрезка с линиями сетки, делящими указанную проекцию на n равных частей. Таким способом можно разделить отрезок AB, изображенный на рис. 69, как на 5, так и на 7 равных частей. Но вот для деления того же отрезка, скажем, на $n=6$ равных частей одних лишь линий сетки не хватает. Для этого можно поступить следующим образом: отложим от точки A в одном направлении на равных расстояниях друг от друга точки $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ (на рис. 69 точки $A_1, \ldots, A_5$ расположены в подряд идущих узлах сетки), а от точки B в противоположном направлении на тех же расстояниях друг от друга точки $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ (на рис. 69 это точки $B_1, \ldots, B_5$). Соединив прямыми линиями попарно A_1 и B_{n-1}, A_2 и $B_{n-2}, \ldots, A_{n-1}$ и B_1, мы разделим этими прямыми отрезок AB на n равных частей, поскольку все полученные прямые параллельны (так как являются сторонами соответствующих параллелограммов) и отстоят друг от друга на равных расстояниях.

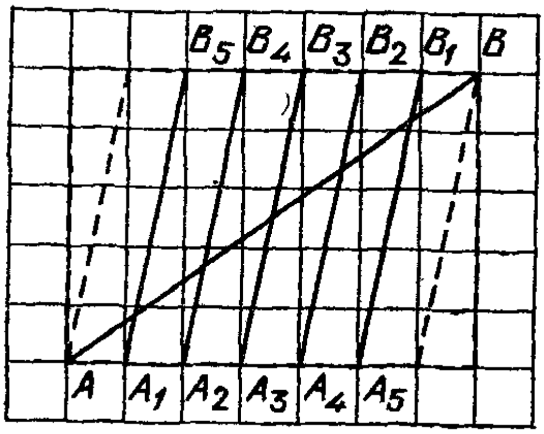


Рис. 69

16.4. Пользуясь методами, изложенными в решении задачи 16.1, можно построить середины сторон треугольника ABC, а затем провести его медианы. Точка E пересечения медиан не обязательно попадает в узел, даже если середины

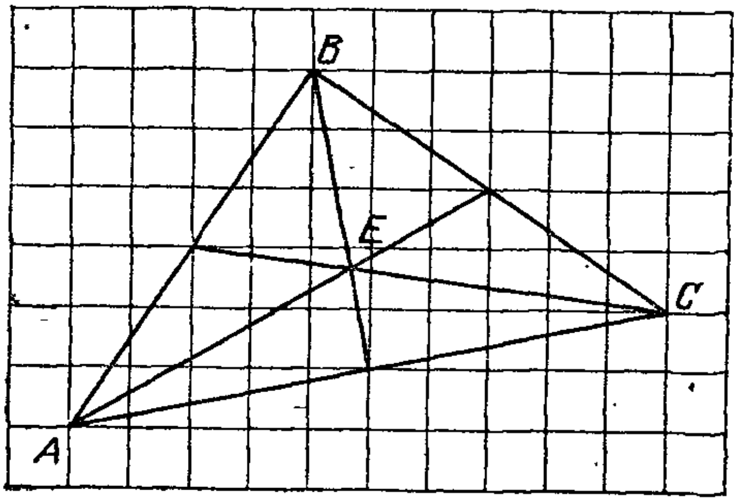


Рис. 70

всех трех сторон треугольника являются узлами сетки (рис. 70). Можно доказать, что это попадание произойдет тогда и только тогда, когда сумма горизонтальных, равно как и сумма вертикальных проекций векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, кратна 3.

16.5. Сосчитаем по клеточкам длину горизонтальной проекции AE и вертикальной проекции EB вектора $\overrightarrow{AB}$, после этого точку C перенесем по горизонтали в точку F, которую затем перенесем по вертикали в точку D так, чтобы выполнялись равенства $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{EB}$ (рис. 71).

Тогда из равенства прямоугольных треугольников ABE и CDF и параллельности их соответствующих катетов следует равенство и параллельность их гипотенуз AB и CD. Таким образом, имеем требуемое равенство $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$. Из построения ясно, что точка D совпадает с узлом сетки.

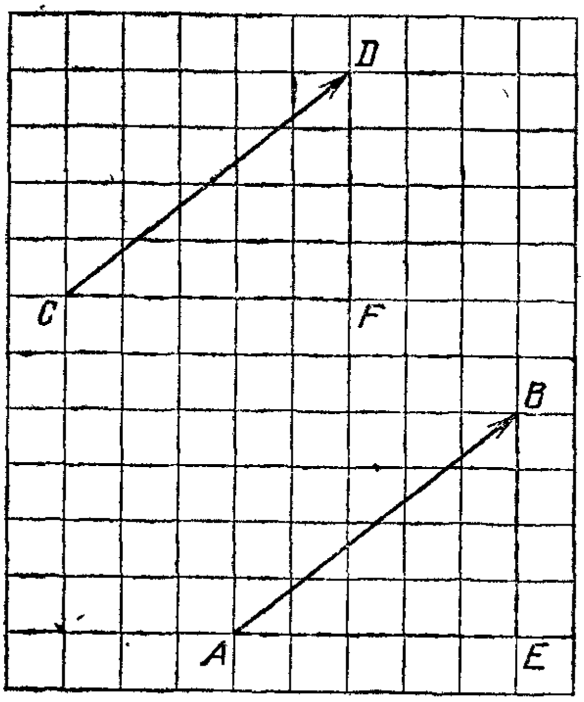


Рис. 71

Заметим, что точку D можно было построить и по-другому: параллельно перенеся точку B на вектор $\overrightarrow{AC}$.

16.6. В силу параллельности средних линий треугольника ABC соответствующим его сторонам получаем, что середины D, E и F сторон AB, BC и CA этого треугольника образуют вместе с вершиной A параллелограмм $ADEF$ (рис. 72). Поэтому, если три его вершины A, D и F находятся в узлах сетки, то четвертая вершина, будучи результатом параллельного переноса точки D на вектор $\overrightarrow{AF}$, также совпадает с узлом сетки (см. задачу 16.5).

16.7. Пусть данная прямая проходит через узлы A и B. Чтобы провести через данный узел C прямую, параллельную прямой AB, достаточно параллельно перенести точку B на вектор $\overrightarrow{AC}$ (см. задачу 16.5) и через полученную точку D провести прямую CD.

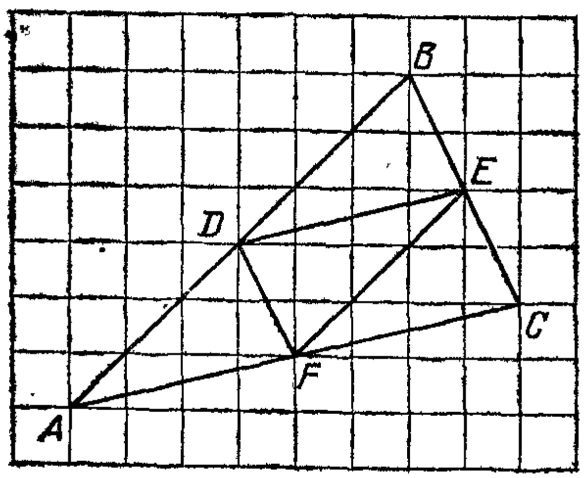


Рис. 72

Для симметричного отражения прямой CD относительно прямой AB можно затем параллельно перенести точки A и B на вектор $\overrightarrow{CA}$ и провести через полученные точки G и H прямую. Хотя точки G и H, вообще говоря, не симметричны точкам C и D относительно прямой AB, но прямая GH параллельна прямой AB и отстоит от нее на том же расстоянии, что и прямая CD (рис. 73).

16.8. Чтобы повернуть точку A вокруг точки B в данном направлении на угол $90°$, можно поступить следующим

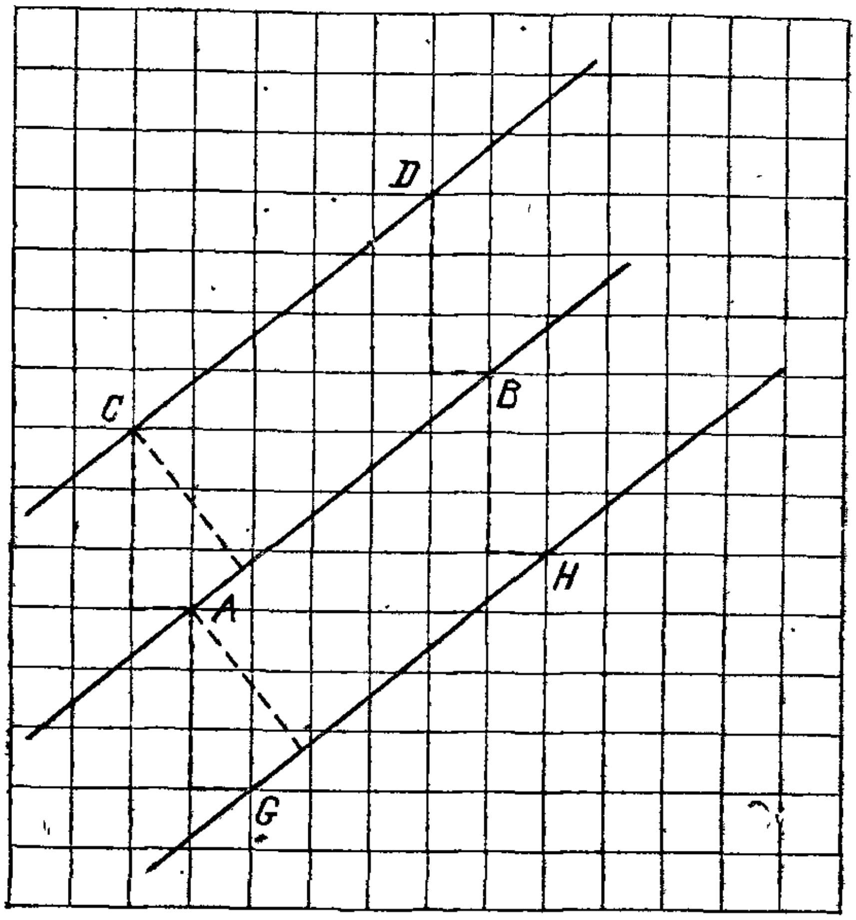
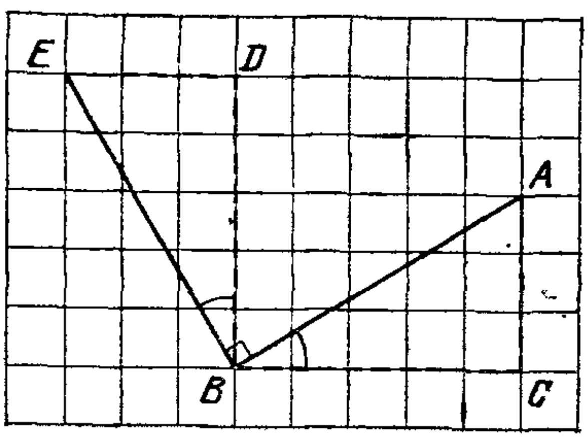


Рис. 73

образом: сосчитать по клеточкам длину горизонтальной проекции BC и вертикальной проекции CA отрезка AB, а затем отложить от точки B по вертикали точку D, а от нее по горизонтали точку E так, чтобы выполнялись равенства $BC=BD$ и $CA=DE$ (рис. 74). Тогда полученная точка E и будет результатом указанного поворота точки A, если, конечно, каждый из катетов BD и DE прямоугольного треугольника BDE является результатом поворота вокруг точки B катетов BC и CA соответственно прямоугольного треугольника BCA именно в том направлении, в котором требовалось (на рис. 74 — это направление против часовой стрелки). Равенство



Рис, 74

$AB=BE$ вытекает из равенства упомянутых прямоугольных треугольников (по двум катетам), а перпендикулярность отрезков AB и BE является следствием соотношения $\angle ABE=\angle ABD+\angle DBE=\angle DBA+\angle ABC=\angle DBC==90°$.

16.9. Повернем одну из двух данных вершин A или B, скажем A, вокруг вершины B на угол 90°, затем вершину B вокруг полученной точки C на угол 90° в том же направлении (рис. 75). Полученная в результате точка D вместе с точкой C и двумя данными вершинами A и B образует вершины квадрата (поскольку четырехугольник $ABCD$, согласно построению, является параллелограммом с прямым углом при вершине B и равными соседними сторонами AB и BC). Попутно мы доказали, что вершины C и D искомого квадрата находятся в узлах сетки, так как они являются результатом поворота, описанного в решении задачи 16.8.

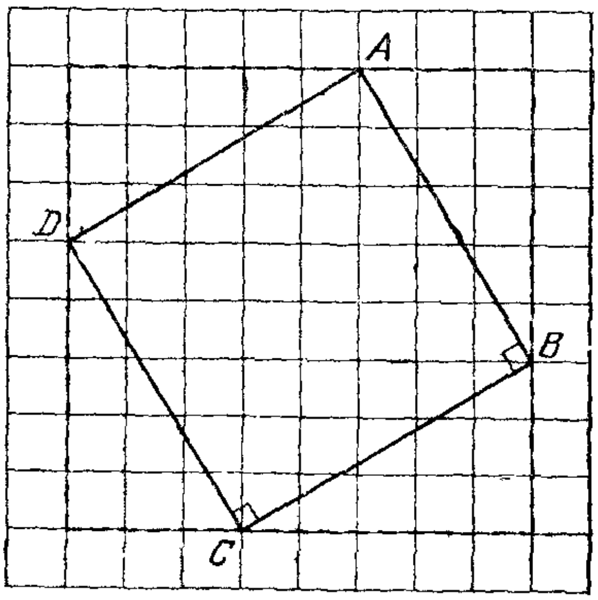


Рис. 75

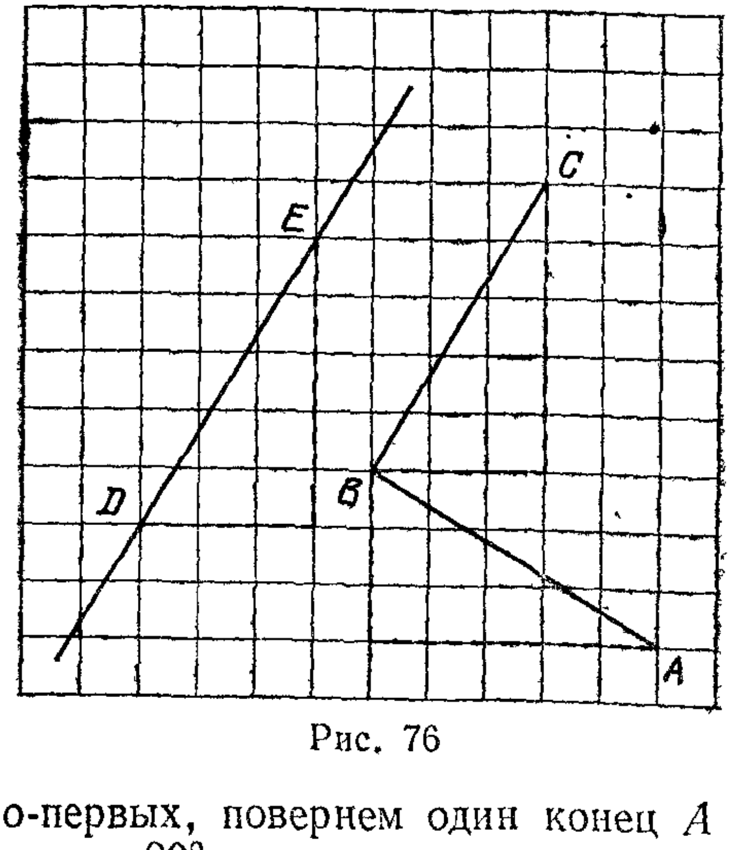


Рис. 76

16.10. Во-первых, повернем один конец A данного отрезка AB на угол 90° вокруг другого его конца B в любом направлении (см. задачу 16.8) и получим в результате точку C. Во-вторых, параллельно перенесем заданную точку D на вектор $\overrightarrow{BC}$, получив точку E (см. задачу 16.5). Искомый перпендикуляр совпадает с прямой DE (рис. 76), поскольку эта прямая параллельна перпендикуляру BC к прямой AB. Впрочем, при известной сноровке точку C можно и не строить, а откладывать известный вектор $\overrightarrow{BC}$ сразу от точки D.

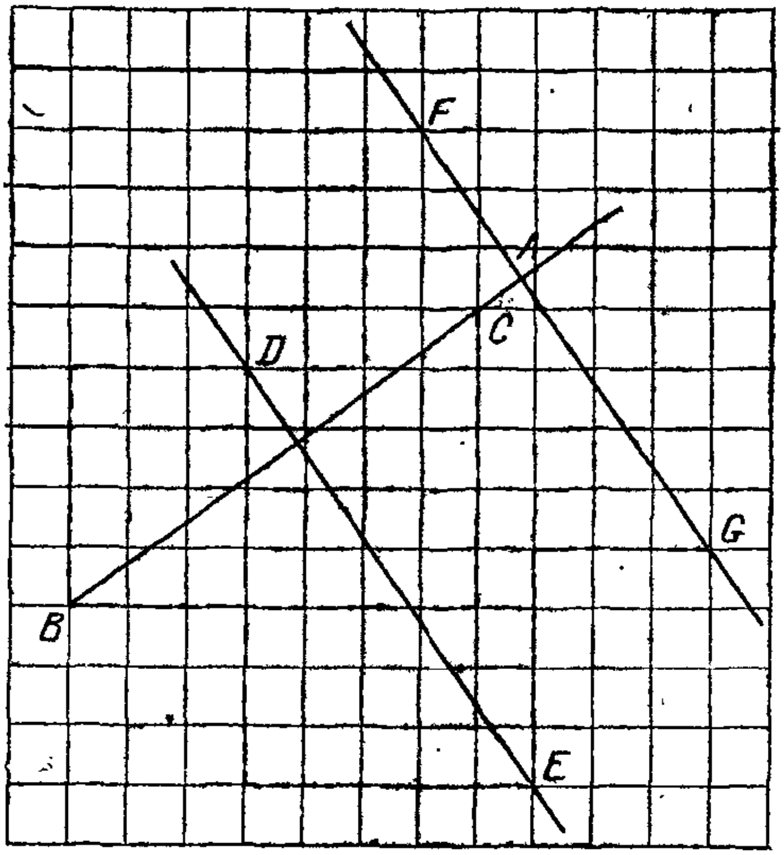


Рис. 77

16.11. Искомая точка A лежит как на перпендикуляре BC к данной прямой DE, проходящем через заданную точку B, так и на прямой FG, параллельной прямой DE и отстоящей от нее на то же расстояние, что и точка B. Построение точек C и F, G можно произвести, не проводя никаких линий (см. решения задач 16.10, 16.7), а затем найти точку пересечения A прямых BC и FG. Эта точка, вообще говоря, не обязательно является узлом сетки, что хорошо видно на рис. 77.

16.12. Если прямая проходит через два узла A и B, то она либо совпадает с линией сетки и тогда образует с ней нулевой угол с нулевым тангенсом, либо является гипотенузой прямоугольного треугольника ABC, катетами AC и BC которого служат целочисленные горизонтальная и вертикальная проекции отрезка AB. В последнем случае тангенсом одного из острых углов треугольника ABC является отношение $\frac{BC}{AC}$, которое есть рациональное число.

Для доказательства обратного утверждения допустим, что тангенс угла наклона данной прямой к горизонтали равен рациональному числу $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Тогда, отступив от узла сетки, через который уже проходит наша прямая, на n единиц по горизонтали, а затем на m единиц по вертикали (в соответствующую сторону), мы получим еще один узел сетки, который обязан лежать на той же прямой, поскольку отрезок, соединяющий два этих узла, составляет с горизонталью угол, тангенс которого равен как раз $\frac{m}{n}$.

16.13. Отметим точки D, E, F, G и соединим их с точками A, B и C и друг с другом так, как показано на рис. 78. Тогда из равенства прямоугольных треугольников ADB, AEC и их расположения относительно линий сетки вытекает, что точка C является результатом поворота точки B, вокруг точки A на угол 90° (см. задачу 16.8). Поэтому ABC есть равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой BC. Отсюда имеем равенство $\angle ABC = 45°$.

Учитывая также, что угол ABC составлен из угла ABG, тангенс которого равен $\frac{1}{2}$, и угла FBC, тангенс которого равен $\frac{1}{3}$, получаем равенство $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

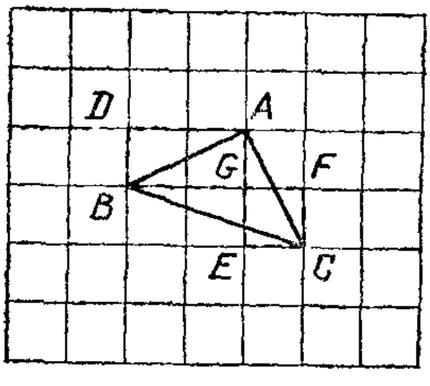


Рис. 78

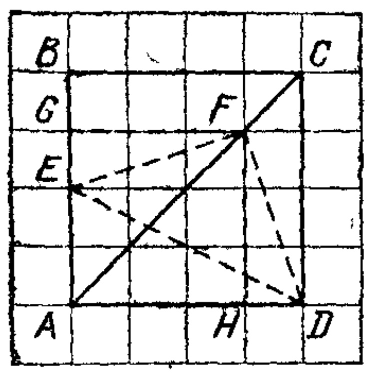


Рис. 79

16.14. *Наложим* на квадрат $ABCD$ сетку с шагом, равным четверти стороны квадрата, и обозначим узлы G и H так, как указано на рис. 79. Тогда из равенства и расположения прямоугольных треугольников EFG и DFH вытекает, что E является результатом поворота точки D вокруг точки F на угол 90° (см. задачу 16.8). Поэтому из равнобедренного прямоугольного треугольника DFE имеем равенства

$$\angle DFE=90^\circ,\quad DF:FE=1.$$

16.15. Расположим сетку так же, как это было сделано при решении задачи 16.14, и обозначим на луче узлы сетки G, H, K, а также узлы L, M, N и P, Q, R в соответствии с рис. 80. Учитывая, что угол DFE прямой, получаем равенства

$$\operatorname{tg}\angle FGD=\frac{FD}{FG}=\frac{1}{2},\qquad \operatorname{tg}\angle FHD=\frac{FD}{FH}=\frac{1}{4},$$
$$\operatorname{tg}\angle FKD=\frac{FD}{FK}=\frac{1}{5}.$$

Теперь остается заметить справедливость соотношений

$$\angle FGD=\angle FGL+\angle DGP,\qquad \angle FHD=\angle FHM-\angle DHQ,$$
$$\angle FKD=\angle FKN-\angle DKR$$

и посчитать тангенсы углов

$$\operatorname{tg}\angle FGL=\operatorname{tg}\angle FHM=\operatorname{tg}\angle FKN=\frac{1}{3},$$
$$\operatorname{tg}\angle DGP=\frac{DP}{GP}=\frac{1}{7},$$
$$\operatorname{tg}\angle DHQ=\frac{DQ}{HQ}=\frac{1}{13},\qquad \operatorname{tg}\angle DKR=\frac{DR}{KR}=\frac{1}{8}.$$

После этого требуемые равенства получаются, если вместо указанных углов подставить соответствующие арктангенсы.

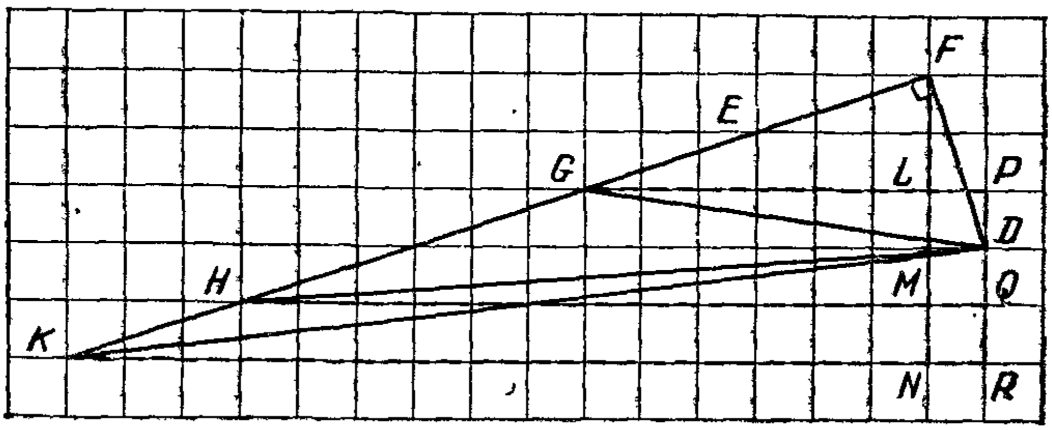


Рис. 80

16.16. Пусть вершины треугольника ABC лежат в узлах сетки, а угол ABC не равен 90°. Так как в этой ситуации невозможно, чтобы одна из сторон AB или BC этого угла имела горизонтальное направление, а другая вертикальное, то без ограничения общности можно считать, скажем, вертикальное направление не занятым ни одной из указаніх сторон. Поэтому тангенсы углов, образованных лучами 1 и BC с некоторым горизонтальным лучом BD (рис. 81), ажутся определенными (ведь ни один из углов ABD и $3D$ не является прямым) и к тому же рациональными слами, так как и вертикальные, и горизонтальные проек- и отрезков AB и BC имеют целую длину. Обозначив $\alpha=$ $\operatorname{tg}\angle ABD$, $\beta=\operatorname{tg}\angle CBD$, получаем, что тангенс угла $ABC=\angle ABD-\angle CBD$ есть также рациональное число $=\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}$ (здесь знаменатель $1+\alpha\beta$ мог бы оказаться равным лю только в случае прямо- угла ABC). Таким образом, казано, что угол ABC ли- прямой, либо имеет рацио- льный тангенс. Аналогич- іе утверждения будут верны для двух других углов тре- ольника ABC.

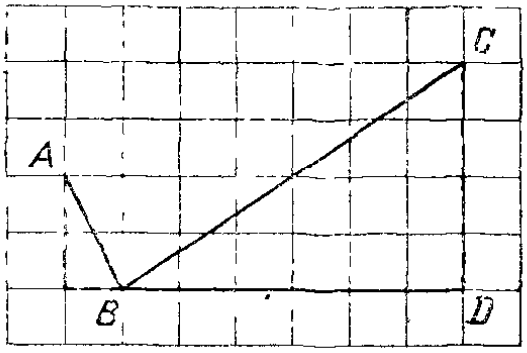


Рис. 81

16.17. Пусть прямая про-)дит через узлы B и C, а по- рнуть ее нужно вокруг узла B на угол с данным рацио- льным тангенсом α. Один из способов это сделать состоит том, чтобы определить по узлам B и C тангенс β угла на- юна прямой BC к горизонтальному (или вертикальному) учу BD, а затем найти тангенс γ угла наклона искомой)ямой к тому же лучу по формуле

$$\gamma=\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}.$$

оскольку полученный тангенс будет также рациональным ислом (в случае $1-\alpha\beta=0$ искомая прямая должна быть ерпендикулярной к прямой BD), то некоторый узел B эжно построить по значению γ так, чтобы выполнялось авенство $\operatorname{tg}\angle ABD=\gamma$. Например, на рис. 81 показано, го получится, если прямую BC повернуть на угол, тангенс эторого равен $\alpha=8$: так как $\beta=\operatorname{tg}\angle CBD=\frac{2}{3}$, то $\gamma=$ $=\operatorname{tg}\angle ABD=\frac{8+\frac{2}{3}}{1-8\times\frac{2}{3}}=\frac{26}{-13}=-2$ (знак минус у послед- его тангенса означает, что угол ABD тупой).

16.18. Если бы все вершины равностороннего треуголь- ика одновременно лежали в узлах сетки, то, согласно тверждению задачи 16.16, углы при вершинах этого треугольника имели бы рациональные тангенсы. Однако хорошо известно, что это не так: $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$ — иррациональное число.

16.19. Все вершины правильного шестиугольника одновременно не могут лежать в узлах сетки, поскольку три его вершины, взятые через одну, являются вершинами правильного треугольника и уже эти три вершины не могут оказаться в узлах (см. задачу 16.18), а тем более все шесть вершин.

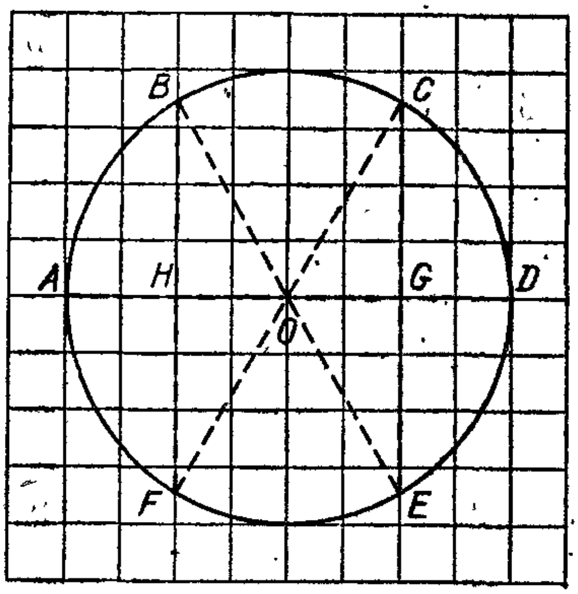


Рис. 82

16.20. Проведем окружность с центром в узле O сетки и четным радиусом (рис. 82). Тогда две диаметрально противоположные вершины A и D шестиугольника можно взять на горизонтальной линии сетки, проходящей через точку O (рис. 82). Еще две вершины B и F можно взять на вертикальной линии сетки, проходящей через середину H радиуса OA, и, наконец, последние две вершины C и E — на вертикальной линии, проходящей через середину G радиуса OD. Точки A, B, C, D, E, F являются вершинами правильного шестиугольника, поскольку угол AOB равен 60° (из прямоугольного треугольника BOH с гипотенузой OB, вдвое большей катета OH), аналогично по 60° равны и углы AOF, COD, EOD. Следовательно, равные (симметричные относительно прямой AD) углы BOC и EOF, в сумме составляющие $360° - 4 \times 60° = 120°$, также равны по 60°.

16.21. Пусть три заданные линии сетки для определенности горизонтальны. Тогда рассмотрим вертикальную линию, которая пересекает их в точках A, B и C (рис. 83). Отложим от точки C по горизонтали точки D и E так, чтобы выполнялись равенства $CD = AB$, $DE = BC$. Затем аналогично отложим от точки E по вертикали точки F и G, а от точки G по горизонтали точку H, для которой $GH = AB$. Тогда точки B, D, F, H являются вершинами квадрата (см. задачу 16.9), причем три из них B, D, H лежат на заданных линиях сетки.

Для попадания четвертой вершины квадрата на одну из этих трех линий сетки необходимо и достаточно, чтобы редняя из линий была равноудалена от двух крайних, т. е. тобы на рис. 83 выполнялось равенство $AB=BC$ (четвертая вершина может находиться только на средней линии,

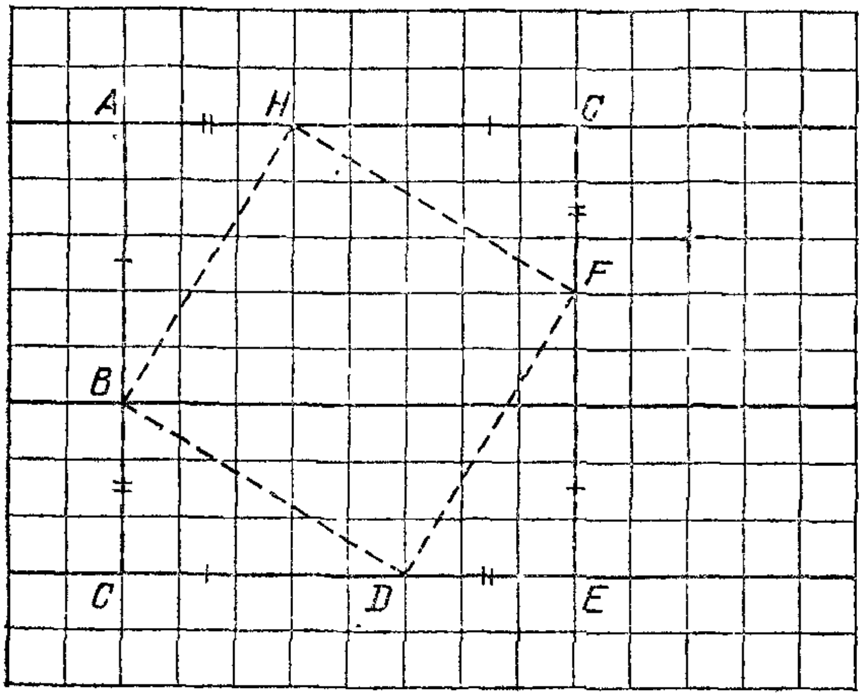


Рис. 83

которая тогда должна содержать диагональ квадрата со всеми вытекающими отсюда последствиями).

16.22. Докажем, что ни при каких значениях n, кроме $n=4$, правильный n-угольник не может иметь все вершины в узлах сетки. Случаи $n=3$ и $n=6$ рассмотрены в задачах 16.18 и 16.19. Пусть некоторый правильный n-угольник при $n=5$ или $n>6$ все же удовлетворяет требованию задачи. Проведем в нем все диагонали, соединяющие каждые две вершины, между которыми находятся ровно две вершины n-угольника (рис. 84). Тогда внутри рассматриваемого многоугольника образуется меньший, тоже правильный n-угольник, ограниченный проведенными диагоналями. При этом вершины меньшего многоугольника будут также лежать в узлах сетки, поскольку каждая из них будет являться четвертой вершиной параллелограмма (см. задачу 16.5), образованного некоторыми соседними сторонами большего многоугольника и параллельными им диагоналями: на рис.

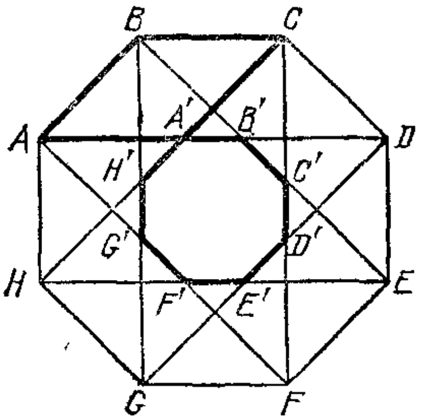


Рис. 84

84 таким параллелограммом является, например, четырехугольник $ABCA'$. Применив к меньшему многоугольнику те же рассуждения, мы получим еще меньший многоугольник, затем еще меньший и т. д. Однако этот процесс не может неограниченно продолжаться, так как сторона многоугольника при каждом уменьшении умножается на определенное число, меньшее 1, а значит, рано или поздно станет сама меньше шага сетки, что приведет нас к противоречию. Итак, сделанное выше предположение себя не оправдало.

16.23. Каждый из искомых прямоугольных треугольников ABC отличается от других тем, что его высота BD,

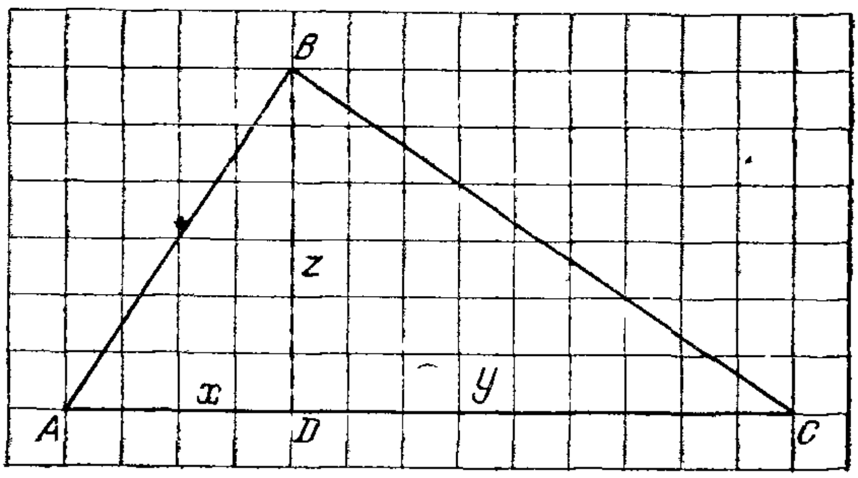


Рис. 85

опущенная на гипотезу AC, имеет целую длину z и делит эту гипотезу на целочисленные отрезки AD и DC (рис. 85). Для начала будем считать, что числа $x=AD$ и $y=DC$ взаимно просты, так как любой простой делитель этих чисел является также и делителем числа $z^2=xy$, а значит, числа z (сравните с рассуждениями о пифагоровых тройках в § 7). Если произведение взаимно простых чисел x и y есть квадрат какого-то натурального числа z, то и сами числа x и y являются квадратами натуральных чисел. Верно и обратное. Поэтому для удовлетворения условия $xy=z^2$ необходимо и достаточно в данном случае, чтобы выполнялись равенства $x=m^2$ и $y=n^2$, где $(m, n)=1$. Наконец, если снять требования взаимной простоты чисел x и y, то получаются общие формулы для искомых отрезков x, y и высоты z прямоугольного треугольника ABC: $x=m^2k$, $y=n^2k$, $z=mnk$, где k, m, n — произвольные натуральные параметры, причем числа m и n взаимно простые. По каждой такой тройке чисел x, y, z теперь без труда строится нужный нам прямоугольный треугольник.

16.24. Окружность с центром в узле сетки и радиусом 5 проходит, во-первых, через четыре попарно диаметрально противоположных угла сетки, лежащих на линиях, общих с центром окружности. Кроме того, она содержит по одной вершине от каждого из восьми прямоугольных треугольников с катетами 3 и 4, лежащими на линиях сетки, и с гипотенузой 5, один конец которой совпадает с центром окружности. Любая другая окружность указанного вида, содержащая более 4 узлов сетки, должна иметь радиус, равный гипотенузе прямоугольного треугольника с целочисленными сторонами. Наименьший такой радиус равен 5 (см. задачу 7.7).

16.25. Как было замечено при решении задачи 16.24, число узлов сетки, лежащих на данной окружности с центром в узле и целым радиусом, полностью определяется количеством пифагоровых троек чисел, большее из которых

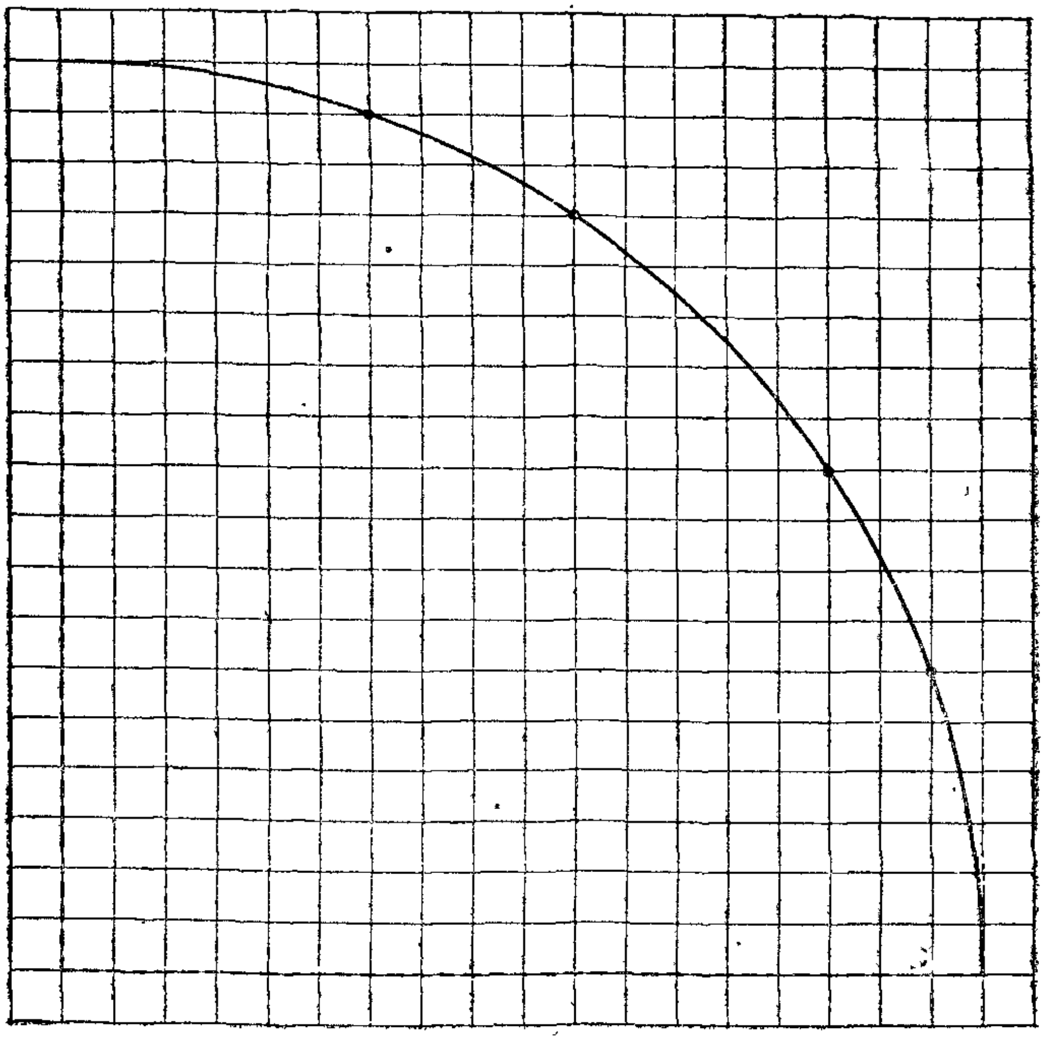
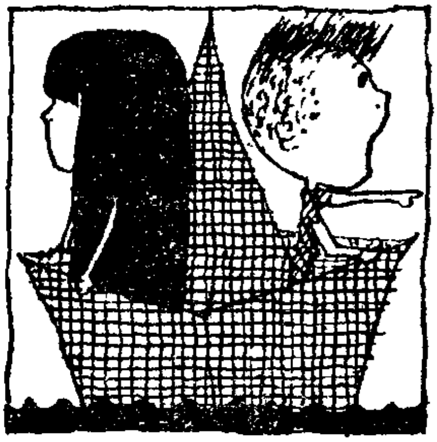


Рис. 86

равно радиусу этой окружности. Если таких троек нет, то число узлов равно 4, а если тройка только одна, то число узлов равно 8, и вообще каждая очередная тройка порождает 8 дополнительных узлов (именно 8, а не 4, поскольку меньшие числа пифагоровой тройки обязательно различны). Так как наименьшее число, участвующее в качестве бо́льшего числа сразу в двух пифагоровых тройках, равно 25 (см. решение задачи 7.7, где указаны, в частности, тройки 15, 20, 25 и 7, 24, 25), то искомый наименьший радиус окружности указанного вида, содержащей более 12 узлов сетки, равен как раз 25. Эта окружность проходит сразу через 20 узлов сетки. Ее четверть изображена на рис. 86.



§ 17. ПЕРЕГИБАЯ ЛИСТ БУМАГИ

Среди множества возможных действий с бумагой особое место занимает операция ее перегибания. Одним из достоинств этой операции является то, что ее можно производить, не имея под рукой никаких дополнительных инструментов — ни линейки, ни циркуля, ни даже карандаша. Этим вы, конечно, неоднократно пользовались, когда складывали из бумаги пилотку, самолет, кораблик и т. п.

Практические свойства бумаги порождают своеобразную геометрию, с элементами которой мы познакомим вас в настоящем параграфе. Роль линий в этой геометрии будут играть края листа и складки, образующиеся при его перегибаниях, а роль точек — вершины углов листа и точки пересечения складок друг с другом или с краями листа. Оказывается, возможности операции перегибаний листа очень велики. То, что они включают в себя всю геометрию одной линейки, не вызывает сомнений. Но они в определенной степени таят в себе также и возможности циркуля, хотя и не позволяют проводить непосредственно дуги окружности.

Заметим, что при реальной работе с бумагой нужно учитывать следующие обстоятельства. Если складывать лист бумаги в несколько раз, то сами складки получаются все менее и менее четкими из-за того, что настоящая бумага имеет некоторую, пусть незначительную, но ненулевую толщину. Этот эффект иногда начинает проявляться уже при втором перегибании. Следовательно, решая задачи этого параграфа, вы должны беспокоиться о том, чтобы при реализации решений бумагу приходилось складывать по возможности в меньшее число раз. Кроме того, не будем закрывать глаза и на то, что внешний вид бумаги несколько портится от дополнительных складок. Поэтому поищите более экономные в этом смысле построения.

17.1. Почему именно прямая?

Каждый, наверное, уже давно привык к тому, что бумага перегибается всегда по прямой линии, а не по окружности и не по какой-нибудь другой кривой. Попробуйте найти причину этого явления.

17.2. Середина отрезка

На листе бумаги отмечены две точки A и B. Как с помощью перегибаний этого листа разделить отрезок AB пополам?

17.3. Перпендикуляр к прямой

Как с помощью перегибаний листа бумаги провести прямую, перпендикулярную данной прямой и проходящую через данную точку?

17.4. Параллельная прямая

Как с помощью перегибаний листа бумаги провести прямую, параллельную данной прямой и проходящую через данную точку?

17.5. Центр круга

Как с помощью перегибаний найти центр вырезанного из бумаги круга? Можно ли найти центр круга, нарисованного на непрозрачной бумаге?

17.6. Пересечение окружности с прямой

На листе бумаги проведена прямая, а также даны центр окружности и некоторая точка на ней (сама окружность не нарисована). Как с помощью перегибаний бумаги найти точки пересечения воображаемой окружности с проведенной прямой?

17.7. Построения в треугольнике

Из бумаги вырезан треугольник. Укажите, как с помощью перегибаний найти следующие линии и точки этого треугольника: биссектрису данного угла; высоту, опущенную из данной вершины (если углы при двух других вершинах острые); медиану, проведенную к данной стороне;

центр вписанной окружности; центр описанной окружности (для остроугольного треугольника).

17.8. Выравнивание краев бумаги

У вас в руках оказался лист бумаги неправильной формы, а вы хотите с помощью перегибаний получить из него бумажный прямоугольник. Один из простейших способов сделать это состоит в последовательном проведении сначала какой-либо прямой AB, затем перпендикуляра BC к ней, затем перпендикуляра CD к полученной прямой и, наконец, перпендикуляра DA к прямым CD и AB (рис. 87). Однако если проводить перпендикуляры так, как это описано в решении задачи 17.3, то слишком много бумаги уйдет в отходы. Дело в том, что проведение перпендикуляров описанным способом предполагает наличие достаточно больших участков данной прямой как с одной, так и с другой стороны от данной точки (иначе точность построения сильно падает: таким образом на рис. 87 перпендикуляр к прямой AB через точку B точно провести практически не удается).

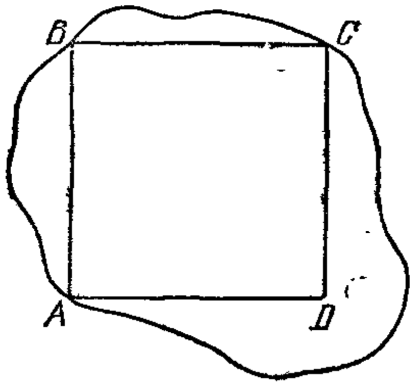


Рис. 87

Придумайте другой способ проведения перпендикуляров, пользуясь которым можно свести расход бумаги при выравнивании ее краев к минимуму (например, реализовать построение прямоугольника $ABCD$, изображенного на рис. 87).

17.9. Из прямоугольника квадрат

Из бумаги вырезан прямоугольник. Получите из него квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника.

17.10. Из прямоугольника треугольник

Из бумаги вырезан прямоугольник. Укажите способ получения из него различных равнобедренных треугольников и, в частности, равностороннего треугольника.

17.11. Треугольник в квадрате

Из бумаги вырезан квадрат $ABCD$. Как при помощи перегибаний вписать в него равносторонний треугольник AEF, имеющий с квадратом ровно одну общую вершину A (рис. 88).

17.12. Из треугольника шестиугольник

Из листа бумаги, имеющего форму равностороннего треугольника, с помощью перегибаний нужно получить правильный шестиугольник. Как это сделать?

17.13. Из квадрата восьмиугольник

Из листа бумаги, имеющего форму квадрата, с помощью перегибаний нужно получить правильный восьмиугольник. Как это сделать?

17.14. Сумма углов треугольника

С помощью перегибаний произвольного бумажного треугольника продемонстрируйте тот факт, что сумма углов при его вершинах равна 180°.

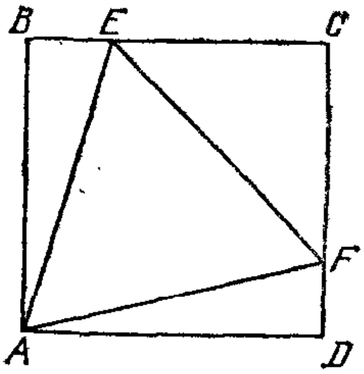


Рис. 88

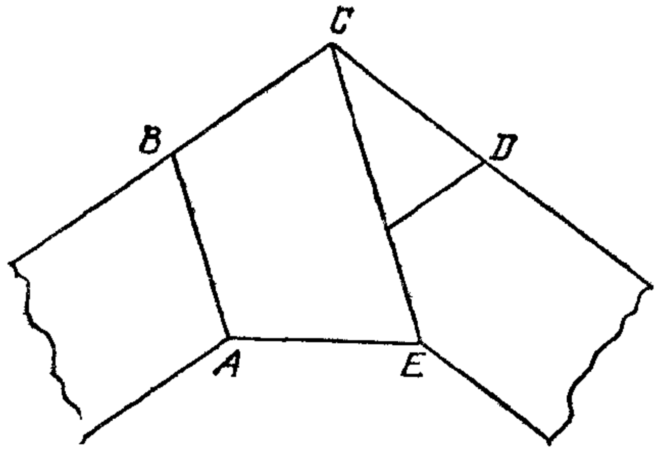


Рис. 89

17.15. «Живая закладка»

Если вам понадобилось чем-нибудь заложить страницу в записной книжке так, чтоб закладка торчала, но под рукой нет никакого подходящего предмета, то подумайте над вопросом, нельзя ли перегнуть саму страницу, нигде не разрывая ее, чтобы в результате какой-то ее краешек торчал из закрытой записной книжки.

17.16. Можно ли увеличить периметр?

Можно ли сложить многоугольник, вырезанный из бумаги, так, чтобы периметр полученной фигуры оказался больше, чем периметр исходного многоугольника?

17.17. Квадрат из полоски

Из бумажной полоски шириной 1 с помощью нескольких перегибаний получите квадрат, у которого диагональ равна 2.

17.18. Шестиугольник из полоски

Из бумажной полоски шириной 1 с помощью перегибаний получите правильный шестиугольник, у которого расстояние между параллельными сторонами равно 2.

17.19. Загадочный узел

Попробуйте завязать бумажную полоску с параллельными краями узлом так, чтобы после ее стягивания и разглаживания в узле образовался пятиугольник $ABCDE$, изображенный на рис. 89. Докажите, что этот пятиугольник правильный.

Решения

17.1. Обычно бумагу перегибают следующим образом: одну часть листа накладывают на другую и, прижав их друг к другу в определенном месте одной рукой, разглаживают оба листа другой рукой до образования складки. Если при этом некоторые две точки A и B бумаги оказались прижатыми друг к другу, то любая точка C складки будет равноудалена от точек A и B, так как отрезки AC и BC после разглаживания окажутся прижатыми друг к другу. Поскольку множество таких точек C совпадает с серединным перпендикуляром к отрезку AB, то полученная складка будет прямой линией.

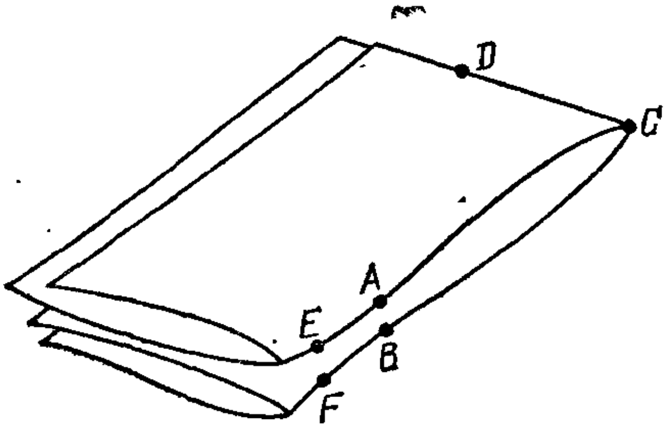


Рис. 90

Заметим, что любые точки листа бумаги, которые оказываются прижатыми друг к другу после его перегибания по некоторой прямой, являются симметричными относительно этой прямой на развернутом листе.

17.2. Перегнем лист бумаги по прямой линии, проходящей через точки A и B так, чтобы сами точки остались на видимой стороне бумаги после перегибания (рис. 90). Тогда, прижав друг к другу точки A и B неразвернутого листа и разгладив этот лист, мы получим искомую точку C на прямой AB, равноудаленную от A и B (решение задачи 17.1).

17.3. Перегнем лист бумаги по данной прямой так, чтобы данная точка D осталась на видимой стороне листа. За-

'ем, не разворачивая лист бумаги, перегнем его еще раз по прямой, проходящей через точку D, проследив при этом за ем, чтобы некоторые точки A и B данной прямой совместились (рис. 90). Тогда полученная прямая CD будет перпендикулярна прямой AB, поскольку углы ACD и BCD в силу имметрии равны друг другу и составляют в сумме развер-утый угол ACB.

В описанном здесь построении после первого перегибания бумагу можно полностью развернуть, а затем перегнуть о прямой, проходящей через точку D, проследив за тем, тобы совместились некоторые другие точки прямой AB, дна из которых лежит на самом краю листа.

17.4. Проведем сначала перпендикуляр к данной прямой ак, как описано в решении задачи 17.3, а потом проведем ерпендикуляр к полученной прямой, проходящий через анную точку. Последняя прямая будет параллельна данной, так как обе они перпендикулярны одной и той же рямой.

17.5. Если круг вырезан из бумаги, то, перегнув его ополам по некоторому диаметру AB (для этого нужно, тобы, как на рис. 91, при наложении две полуокружности овместились друг с другом), а затем перегнув лист еще раз ак, чтобы совместились точки A и B, мы получим центр O руга (см. задачу 17.2).

Если же круг нарисован на непрозрачной бумаге, то ерегнем лист по какой-нибудь хорде и по серединному перпендикуляру AB к ней, а затем найдем середину O этого ерпендикуляра (см. задачи 17.2, 17.3). Точка O будет центом круга, так как AB — его диаметр (серединный перпендикуляр к некоторой хорде).

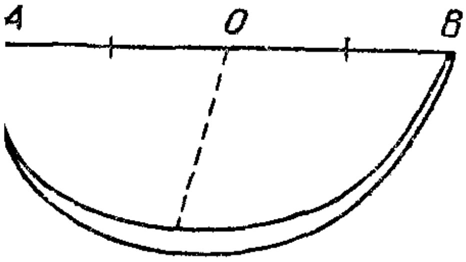


Рис. 91

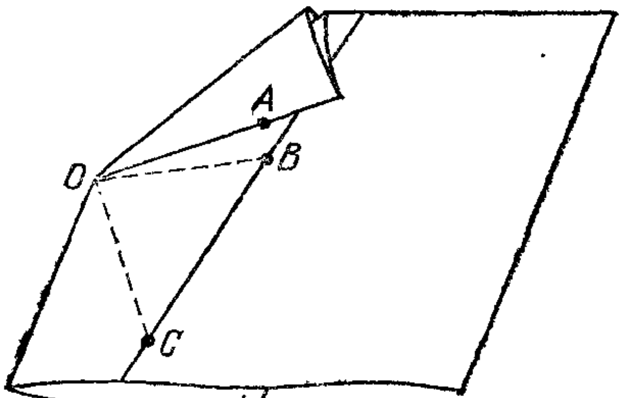


Рис. 92

17.6. Перегнем бумагу по прямой, проходящей через ентр O окружности и данную ее точку A, так, чтобы точки и A оказались на видимой стороне листа (рис. 92). Теперь перегнем лист еще раз по линии, проходящей через точку O, следя за тем, чтобы точка A совместилась с какой-нибудь точкой B проведенной прямой. Тогда точка B будет удалена на расстояние OA от центра окружности, т. е. будет лежать как на прямой, так и на окружности. Подбирая другой угол между первой и второй линиями перегиба, мы получим еще одну точку C пересечения прямой с окружностью (если, конечно, такие точки вообще существуют).

17.7. Для построения биссектрисы угла A треугольника ABC перегнем лист бумаги так, чтобы сторона AB пошла по стороне AC. Тогда линия сгиба будет осью симметрии угла BAC, т. е. его биссектрисой. Высота проводится тем же методом, что и в решении задачи 17.3, где опускается перпендикуляр из данной точки (вершины треугольника) к данной прямой (противолежащей стороне треугольника). Для проведения медианы к стороне BC данного треугольника сначала найдем середину этой стороны (см. задачу 17.2), а затем соединим ее линией сгиба с вершиной A треугольника ABC. Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис каких-нибудь двух углов треугольника. Для нахождения центра описанной окружности достаточно провести серединные перпендикуляры к каким-нибудь двум сторонам треугольника (см. задачи 17.3) и определить точку их пересечения.

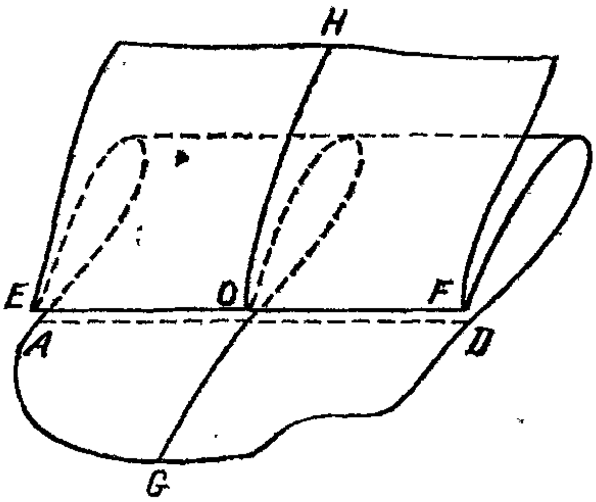


Рис. 93

17.8. Примерно по середине листа проведем две перпендикулярные прямые (линии сгиба) EF и GH, параллельные сторонам будущего прямоугольника $ABCD$ и пересекающиеся в точке O (рис. 93). Приложим сверху край EF листа, перегнутого предварительно по прямой EF, к той части исходного листа, которая содержит точку G, и проследим, чтобы точка O оказалась прижатой к лучу OG. Тогда, перегнув вдоль листа нижнюю часть листа, мы получим прямую AD. Аналогично с другой стороны от прямой EF получаем прямую BC. Приложив также край GH листа, перегнутого по прямой GH, к той части исходного листа, которая содержит точку E, и проследив, чтобы точка O оказалась прижатой к лучу OE и чтобы линия GH пересекла обе построенные ранее линии AD и CB, мы получим сторону AB прямоугольника. Аналогично получаем противоположную его сторону CD. Для доказательства того, что построенный четырехугольник действительно является прямоугольником, достаточно проверить, что прямые AB и CD параллельны прямой EF, а прямые AD и BC — прямой GH.

17.9. Перегнем прямоугольный лист бумаги по биссектрисе одного из его углов BAD, т. е. так, чтобы сторона AB прямоугольника $ABCD$ пошла по соседней с ней стороне AD, а линия сгиба пересекла какую-то третью сторону в точке E (рис. 94). Пусть меньшая сторона AB оказалась наложенной сверху на бо́льшую сторону AD. Тогда, перегнув нижнюю часть листа вдоль линии BE, мы получим квадрат $ABEF$. Действительно, в четырехугольнике $ABEF$ выполнены равенства $\angle ABE = \angle BAF = 90°$, $AB = BE$ (ибо $\angle BAE = 45° = \angle AEB$), $AB = AF$, $BE = FE$, следовательно, все стороны этого четырехугольника равны, а углы прямые.

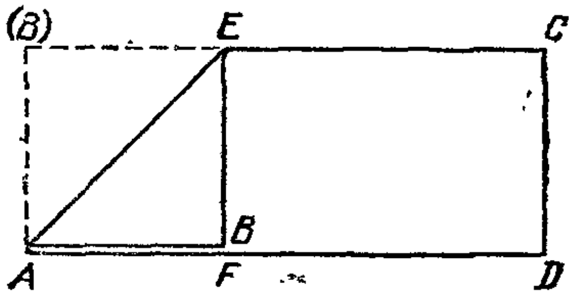


Рис. 94

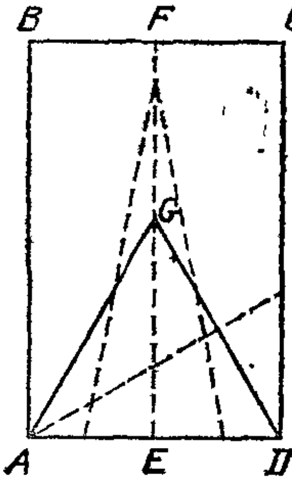


Рис. 95

17.10. Перегнем данный прямоугольник $ABCD$ по серединному перпендикуляру EF, скажем, к меньшей стороне AD (рис. 95). Не разворачивая лист, перегнем его еще раз по любой линии, пересекающей отрезки AE и EF. Тогда после разворачивания последняя линия сгиба, которая пройдет как по прямоугольнику $AEFB$, так и по прямоугольнику $DEFC$, вместе с прямой AD образует равнобедренный треугольник (в силу его симметрии относительно прямой EF).

Для построения равностороннего треугольника перегнем прямоугольник $ABCD$ по линии, проходящей через вершину A, так, чтобы точка D совместилась с какой-нибудь точкой G отрезка EF. Тогда треугольник ADG будет равносторонним, поскольку в силу построения имеем $AD = AG = GD$.

17.11. Проведем серединный перпендикуляр к стороне AD квадрата $ABCD$, а затем перегнем квадрат по линии, проходящей через точку A, так, чтобы точка B совместилась с какой-нибудь точкой G проведенного перпендикуляра (рис. 96). Тогда линия сгиба пересечет сторону BC в точке E, а если перегнуть квадрат по диагонали AC, то точка E совместится с точкой F. Докажем, что треугольник AEF равносторонний. Действительно, так как треугольник ADG равносторонний (ибо $DG=AG=AB=AD$), то $\angle DAG=60°$, $\angle BAG=90°-60°=30°$, $\angle DAF=\angle BAE=\angle GAE=15°$, $\angle FAE=90°-15°-15°=60°$ и, кроме того, $AF=AE$.

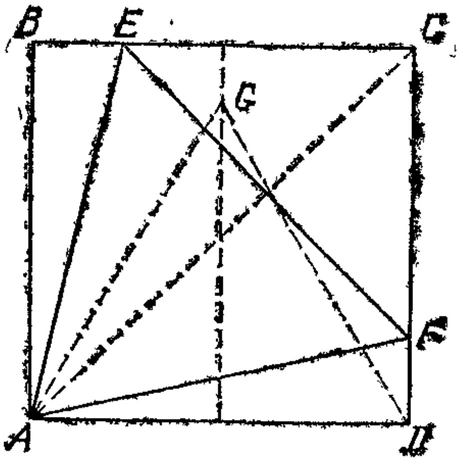


Рис. 96

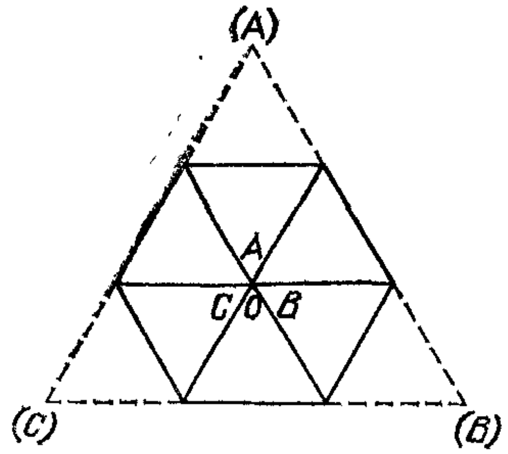


Рис. 97

17.12. Проведя две биссектрисы равностороннего треугольника ABC (см. задачу 17.7), мы найдем его центр O. Загнем углы треугольника так, чтобы их вершины совместились с точкой O (рис. 97). Тогда полученная фигура и будет представлять собой правильный шестиугольник. В самом деле, все шесть треугольников, из которых составлен шестиугольник, являются равносторонними (их равнобедренность вытекает из симметрии всей фигуры относительно биссектрис исходного треугольника ABC, а равенство каждого из углов по 60° следует из равенства 60° каждого из углов при вершинах A, B, C и равенства друг другу трех оставшихся углов с вершинами в точке O).

17.13. Проведем диагонали квадрата $ABCD$, серединный перпендикуляр к стороне AD и биссектрисы углов между диагоналями и этим перпендикуляром. Загнем углы квадрата так, чтобы линии сгиба проходили через точки пересечения биссектрис со сторонами квадрата, а вершины углов A, B, C, D оказались на соответствующих диагоналях (рис. 98). Тогда полученная фигура и будет представлять собой правильный восьмиугольник. В самом деле, все углы, под которыми видны из центра квадрата стороны восьмиугольника, равны между собой (каждый такой угол составлен из двух углов между проведенными выше биссектрисой и диагональю), а кроме того, равны и все расстояния от вершин восьмиугольника до центра квадрата (равные длине той же биссектрисы).

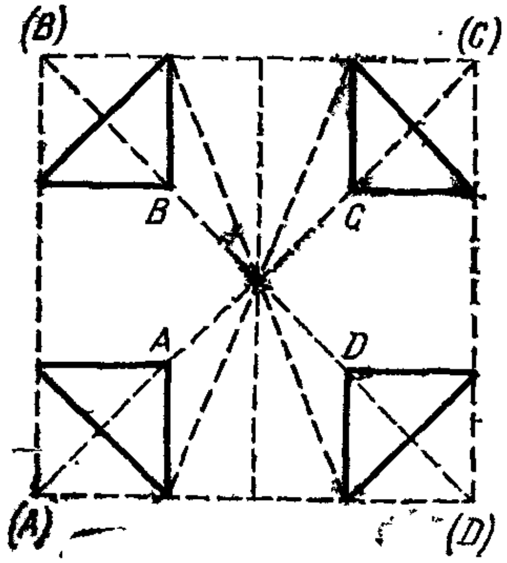


Рис. 98

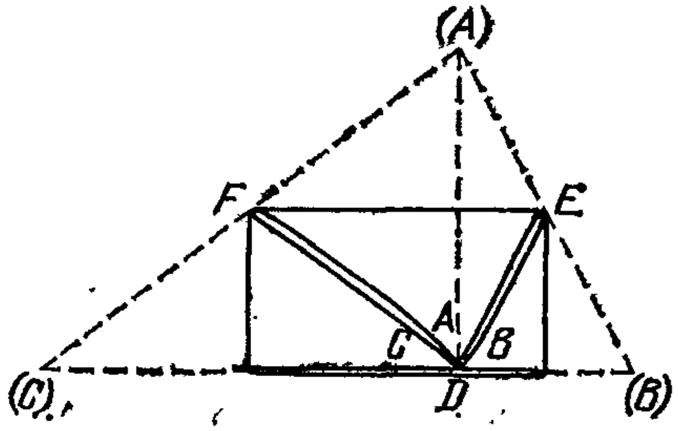


Рис. 99

17.14. Проведем высоту AD треугольника ABC, опущенную из вершины A его наибольшего угла. Теперь загнем все три угла треугольника так, чтобы их вершины совместились с точкой D (рис. 99). Тогда углы при вершинах треугольника без наложений друг на друга составят в сумме развернутый угол с вершиной D, равный $180°$.

Для доказательства этого заметим, что линия сгиба EF, будучи серединным перпендикуляром к высоте AD, является средней линией треугольника ABC. Поэтому имеют место равенства $DE=AE=BE$, $DF=AF=CF$, т. е. треугольники BED, CFD равнобедренные и

$$\angle BDE=\angle ABC, \quad \angle CDF=\angle BCA,$$

а значит, произведенные выше перегибания этих треугольников действительно приведут к указанным совмещениям.

17.15. Один из возможных способов перегибания страницы изображен на рис. 100.

17.16. После каждого перегибания периметр фигуры не увеличивается. Действительно, при наложении одной части фигуры на другую появляется новая часть периметра, а именно линия сгиба. Однако другая часть периметра исчезает, т. е. оказывается внутренней для полученной фигуры. Исчезающая часть периметра содержит ломаную, соединяющую концы линии сгиба, или несколько таких ломаных, если линия сгиба не сплошная (рис. 101). Таким образом, добавляемая часть периметра никогда не превосходит его теряющейся части, поэтому периметр не увеличивается при однократном и, стало быть, при многократном складывании бумажного многоугольника.

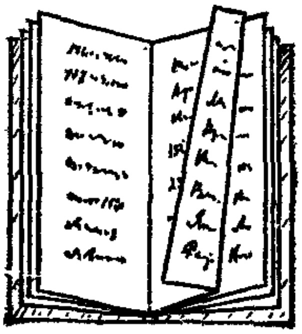


Рис. 100

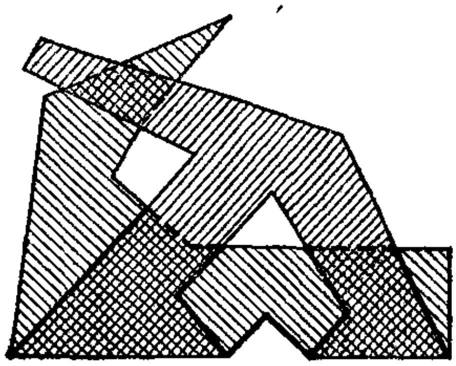


Рис. 101

17.17. Пусть полоска имеет ровный торец AB, перпендикулярный краю полоски (рис. 102). Перегнув ее по биссектрисе угла A, мы получим квадрат ABA_1B_1. Перегнув оставшуюся часть полоски с торцом A_1B_1 по биссектрисе угла A_1,

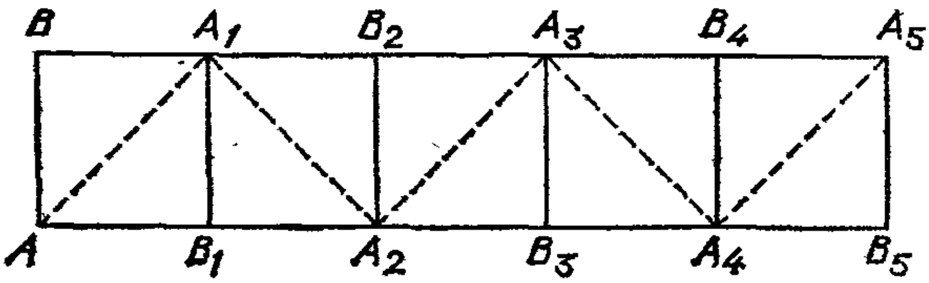


Рис. 102

мы получим квадрат $A_1B_1A_2B_2$. Действуя в таком же духе и далее, мы найдем точки A_3, B_3, A_4, B_4, A_5, B_5. Теперь обрежем полоску по линиям AA_1 и A_4A_5 и получим параллелограмм $AA_1A_5A_4$, который можно сложить так, как показано на рис. 103 (полученный при этом квадрат $AA_1A_2A_3$ даже не будет распадаться).

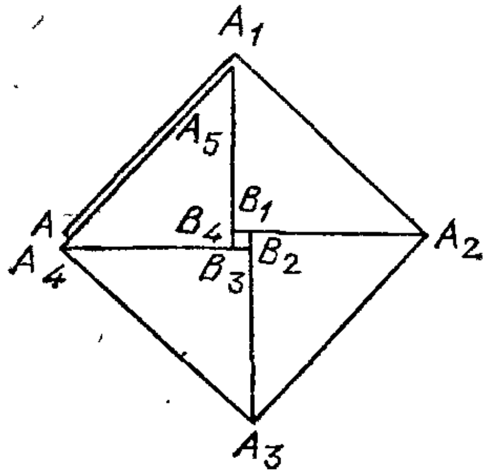


Рис. 103

17.18. Пусть полоска имеет ровный торец AB, перпендикулярный краю AE полоски (рис. 104). Проведем серединный перпендикуляр к отрезку AB и перегнем полоску по некоторой линии AC так, чтобы точка B совместилась с какой-то точкой D серединного перпендикуляра. Тогда треугольник ABD равносторонний (ибо $AB=AD=BD$), откуда $\angle BAD=60°$ и $\angle CAE=\angle DAE+\angle CAD=(90°-$ $-\angle BAD)+\frac{1}{2}\angle BAD=60°$. Перегибая полоску по перпендикуляру к краю AE, проходящему через точку C, получаем равносторонний треугольник ACB_1. Перегибая полоску

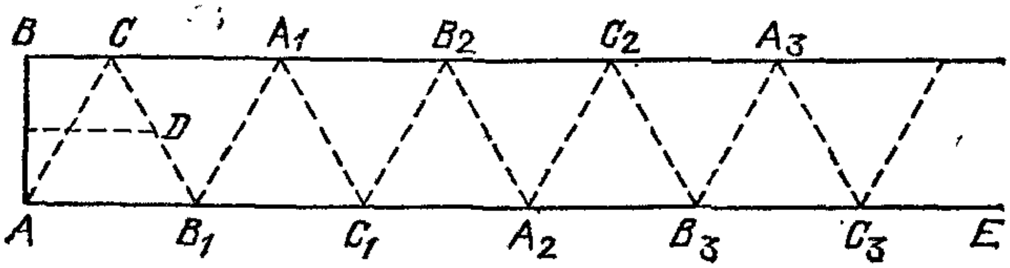


Рис. 104

по перпендикуляру к краю AE, проходящему через точку B_1, получаем равносторонний треугольник CB_1A_1. Действуя в таком же духе и далее, мы найдем точки $C_1, B_2, A_2,$ C_2, B_3, A_3, C_3. Теперь отрежем полоску по линиям AC, A_3C_3 и получим трапецию ACA_3C_3, которую можно сложить так, как показано на рис. 105 (полученный при этом шестиугольник $ACA_1C_1A_2C_2$ даже не будет распадаться).

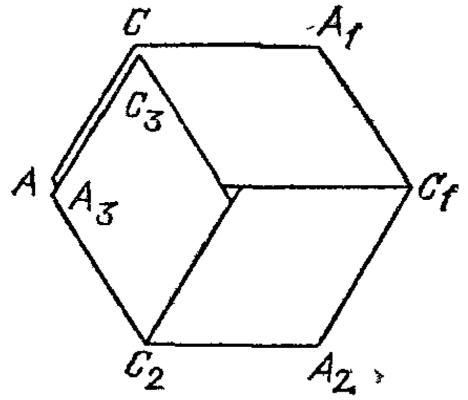


Рис. 105

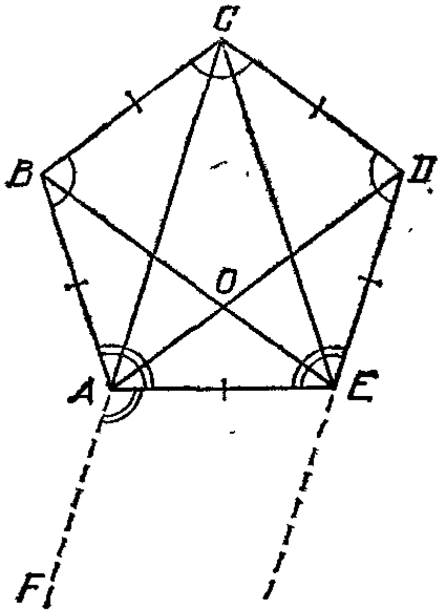


Рис. 106

17.19. Заметим, что при перегибании бумажной полоски с параллельными краями по некоторой поперечной линии AE внутренние накрест лежащие равные углы AED и EAF (рис. 106) превращаются в односторонние, но по-прежнему равные углы AED и EAB. По этой причине имеем равенства

$$\angle EAB=\angle AED, \quad \angle EDC=\angle DCB=\angle CBA.$$

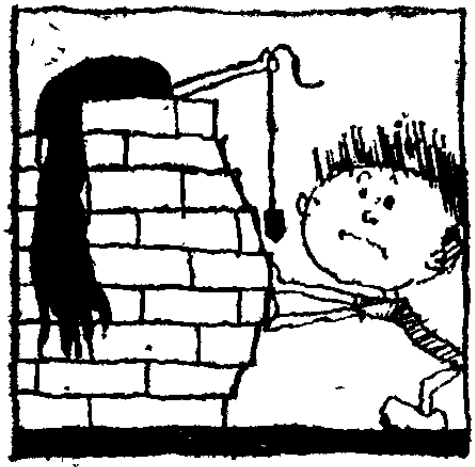
В силу параллельности прямых AC и ED, EC и AB, AD

и BC, BE и CD заключаем, что четырехугольники $ABCD$, $ABCE$, $ACDE$ и $BCDE$ являются трапециями, причем две последние равнобедренными, а четырехугольник $BCDO$ является параллелограммом с одинаковыми высотами (равными ширине полоски), т. е. ромбом. Поэтому имеем

$$DE=BC=CD=AB$$

$$2\angle AED=\angle AED+\angle EAC+\angle CAB=180^\circ+\angle CAB=$$
$$=\angle CDE+\angle ACD+\angle ACB=2\angle CDE,$$

откуда получаем $\angle AED=\angle CDE$, $AE=CD$, а значит, все стороны пятиугольника $ABCDE$ равны между собой и все его углы одинаковы. Мы доказали, что пятиугольник, образующийся в узле бумажной полоски, правильный.



§ 18. ИМЕЕТ ЛИ ФИГУРА НУЖНУЮ ФОРМУ?

Приходилось ли вам вырезать из бумаги, материи или фанеры какие-либо геометрические фигуры? Если да, то после каждого такого вырезания вы, наверняка, испытывали желание проверить, получилась ли фигура такой, какая вам нужна. Подобные вопросы часто возникают при работе столяра, строителя, портного, чертежника и т. д. В настоящем параграфе вы познакомитесь с некоторыми практическими способами проверки свойств плоских или пространственных фигур.

Какие требования мы предъявляем к самой проверке? Прежде всего — однозначность, т. е. возможность по результатам проверки с полной определенностью ответить на вопрос, удовлетворяет или не удовлетворяет данная фигура желаемому свойству. Например, чтобы проверить, является ли данный четырехугольник, вырезанный из фанеры, равнобедренной трапецией, не достаточно установить одно лишь равенство двух его противоположных сторон, хотя оно и имеет место для любой равнобедренной трапеции.

Второе требование к проверке — это ее экономность, т. е. использование минимума инструментов или минимума операций. В рассмотренном выше примере, скажем, нам для проверки остается установить только параллельность двух других, неравных сторон четырехугольника, что можно сделать, как сравнив по величине определенные углы, так и сравнив по длине диагонали. Последний путь нам представляется более экономным, поскольку он не требует дополнительных инструментов кроме уже использованных при сравнении двух сторон (для проверки равенства отрезков можно использовать линейку или кронциркуль, представляющий собой циркуль с иглами на обоих концах).

Для решения задач настоящего параграфа вам понадобится привлечь разнообразные сведения из геометрии. В связи с этим напомним наиболее важные, на наш взгляд, определения, используемые ниже:

а) трапеция — это четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие непараллельны;

б) параллелограмм — это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны;

в) ромб — это четырехугольник, у которого все стороны равны;

г) прямоугольник — это четырехугольник, у которого все углы прямые;

д) квадрат — это прямоугольник, являющийся ромбом. Кроме того, советуем вам припомнить свойства таких основных понятий, как точка, прямая и плоскость.

18.1. Правильность односторонней линейки

Прежде чем пользоваться линейкой для проведения прямых линий, вы хотите убедиться в том, что линейка имеет ровный край. Для этого вы проводите по линейке некоторый отрезок AB, а затем поворачиваете линейку по плоскости бумаги на 180° и проводите отрезок AB по тому же краю линейки еще раз (рис. 107).

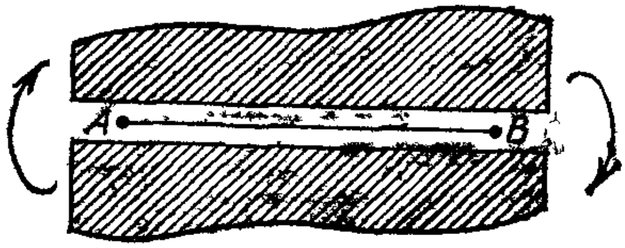


Рис. 107

Какой вывод можно сделать, если два проведенных отрезка AB не совпадут? А если совпадут?

18.2. Исправление предыдущего способа

Как исправить описанный в задаче 18.1 способ проверки правильности односторонней линейки, чтобы он позволял однозначно определять, является ли ее край ровным?

18.3. Правильность двусторонней линейки

Прежде чем пользоваться линейкой с ровными краями для проведения параллельных линий, вы хотите убедиться в том, что линейка имеет параллельные края. Для этого вы отмечаете две точки A, B и, приставив к ним один край линейки, проводите по другому ее краю отрезок CD (рис. 108).

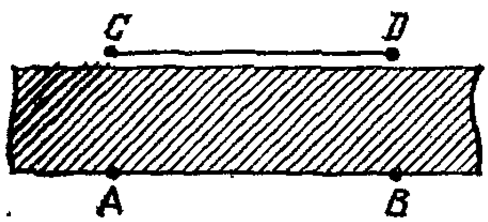


Рис. 108

Как нужно повернуть линейку, чтобы после выполнения описанных операций еще раз совпадение двух проведенных отрезков CD означало, что края линейки параллельны, а несовпадение — наоборот?

18.4. Правильность угольника

Прежде чем пользоваться угольником с ровными краями для проведения перпендикуляров, вы хотите убедиться в том, что ваш угольник имеет прямой угол. Как это сделать?

18.5. Что за треугольник?

Кусок материи имеет форму треугольника. Как, перегибая материю, установить, является ли этот треугольник равносторонним или хотя бы равнобедренным?

18.6. «Проверка квадратности»

Четырехугольный кусок материи перегнули по одной диагонали и убедились в точном совмещении двух образовавшихся в результате треугольников (рис. 109). Затем материю развернули, перегнули по другой диагонали и снова убедились в совмещении треугольников.

Можно ли гарантировать, что этот кусок материи имеет форму квадрата?

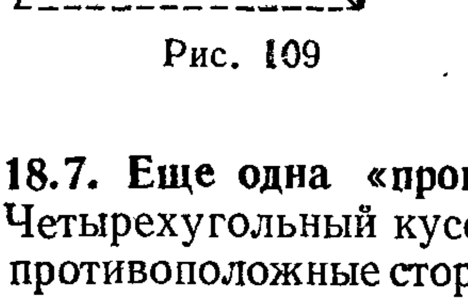


Рис. 109

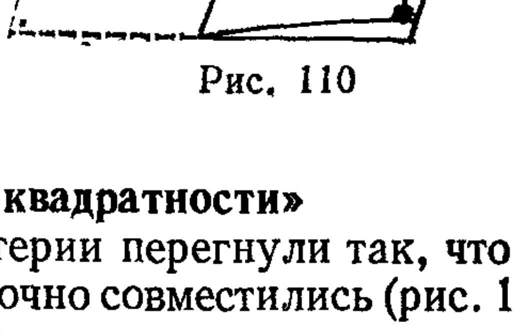


Рис. 110

18.7. Еще одна «проверка квадратности»

Четырехугольный кусок материи перегнули так, что две его противоположные стороны точно совместились (рис. 110). Затем материю развернули и перегнули так, что две другие противоположные стороны точно совместились.

Можно ли гарантировать, что этот кусок материи имеет форму квадрата?

18.8. Перегибания квадрата

Какое наименьшее количество раз необходимо перегнуть четырехугольный кусок материи, чтобы убедиться в том, что он имеет форму квадрата?

18.9. Перегибания круга

Кусок материи перегнули по некоторой линии и убедились в точном совмещении двух образовавшихся в результате частей. Затем материю развернули, перегнули по некоторой другой линии и снова убедились в совмещении частей и т. д. Можно ли после нескольких таких проверок гарантировать, что этот кусок материи имеет форму круга?

18.10. Параллельность прямых

Можно ли с помощью перегибаний куска материи убедиться в том, что два края этого куска параллельны? Как установить, имеет ли данный кусок материи форму трапеции или параллелограмма?

18.11. Перпендикулярность прямых

Кусок материи имеет форму треугольника. Как, перегибая материю, установить, является ли этот треугольник прямоугольным, остроугольным или тупоугольным?

18.12. Вертикальность шеста

На недоступном для вас возвышении установлен длинный шест. Как с помощью отвеса проверить его вертикальность?

18.13. Вогнутость и выпуклость поверхности

Для того чтобы проверить, нет ли на гладкой поверхности стола каких-либо вогнутостей, можно натянуть руками

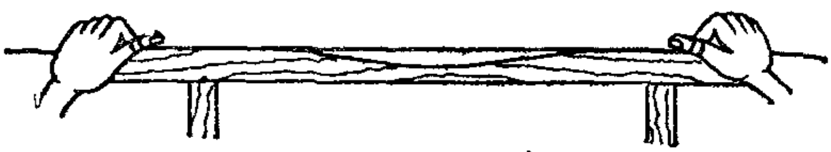


Рис. 111

обыкновенную нитку и, прижимая пальцами ее концы к разным точкам стола, установить, нет ли просвета между ниткой и поверхностью (рис. 111).

На чем основана эта проверка? Годится ли она для отыскания на гладкой поверхности стола каких-либо выпуклостей?

18.14. Перпендикулярность плоскостей

Вы хотите проверить, перпендикулярны ли друг другу соседние стены в вашей комнате. Как воспользоваться для этого теоремой Пифагора?

18.15. Параллельность плоскостей

Вы хотите проверить, параллельны ли друг другу стены коридора. Нельзя ли это сделать с помощью измерительной ленты или просто достаточно длинной палки?

18.16. Признаки трапеции

Какие из следующих действий имеет смысл выполнить, чтобы однозначно установить параллельность двух данных противоположных сторон четырехугольника:

а) соединить отрезком середины двух данных сторон и убедиться в том, что этот отрезок проходит через точку пересечения диагоналей четырехугольника;

б) проверить, что полусумма двух данных сторон равна расстоянию между серединами двух других сторон четырехугольника?

Используя ответ на предыдущий вопрос задачи, придумайте способ проверки того, что данный четырехугольник является трапецией.

18.17. Признаки параллелограмма

Какие из следующих свойств четырехугольника выполнены в том и только в том случае, если этот четырехугольник является параллелограммом:

а) противоположные стороны четырехугольника попарно равны;

б) две противоположные стороны четырехугольника равны, а две другие его стороны параллельны;

в) каждая из диагоналей четырехугольника делится точкой их пересечения пополам?

18.18. Ромб ли это?

На плоскости даны четыре точки A, B, C, D, про которые известно только, что $AB=BC=CD=DA$. Можно ли утверждать, что точки A, B, C, D являются вершинами некоторого ромба?

18.19. Признаки прямоугольника

Достаточно ли для проверки того, что все углы данного четырехугольника являются прямыми, установить одно из следующих свойств:

а) равенство двух противоположных сторон четырехугольника и равенство его диагоналей;

б) попарное равенство противоположных сторон и равенство его диагоналей;

в) равенство всех четырех отрезков, на которые разбиваются диагонали четырехугольника точкой их пересечения?

18.20. Признаки квадрата

Какие из следующих свойств четырехугольника выполнены в том и только в том случае, если этот четырехугольник является квадратом:

а) равенство всех четырех сторон четырехугольника;

б) равенство всех четырех сторон четырехугольника и равенство его диагоналей;

в) равенство трех сторон четырехугольника и равенство его диагоналей?

18.21. Правильность равностороннего многоугольника

Пусть все стороны многоугольника равны между собой. Будет ли он обязательно правильным, если выполнено одно из следующих условий:

а) около этого многоугольника можно описать окружность;

б) в этот многоугольник можно вписать окружность?

18.22. По одним лишь диагоналям

Верно ли, что если в пятиугольнике равны все пять диагоналей, то он является правильным?

18.23. Правильность пятиугольника

Пусть все стороны выпуклого пятиугольника равны между собой. Устанавливая равенство каких-то из его диагоналей, вы хотите убедиться в том, что этот пятиугольник является правильным.

Какое наименьшее число диагоналей вам нужно проверить?

18.24. О правильности и неправильности

Докажите, что если в выпуклом шестиугольнике равны все стороны, а все три его главные диагонали (т. е. такие, которые разбивают его на два четырехугольника) пересекаются в одной точке, то этот шестиугольник может и не быть правильным. Будет ли он правильным, если добавить одно из следующих условий:

а) каждая из главных диагоналей делится точкой их пересечения пополам;

б) все шесть отрезков, на которые разбиваются главные диагонали точкой их пересечения, равны между собой;

в) все три главные диагонали равны между собой, а все его неглавные диагонали разбиваются на тройки равных диагоналей, образующих треугольники?

18.25. Правильность шестиугольника

Пусть все стороны выпуклого шестиугольника равны между собой. Устанавливая равенство каких-то из его диагоналей, вы хотите убедиться в том, что этот шестиугольник является правильным.

Какое наименьшее число диагоналей нужно проверить?

Решения

18.1. При несовпадении двух проведенных отрезков AB можно сделать вывод о непригодности линейки для проведения прямых линий: ведь если бы проведенные отрезки были действительно прямыми, то они должны были бы совпасть (через точки A и B проходит ровно одна прямая). Если же проведенные отрезки совпадут, то это еще не будет означать, что линейка и в самом деле имеет ровный край. На рис. 112 изображена линейка с неровным краем, которая успешно пройдет проверку, описанную в условии задачи.

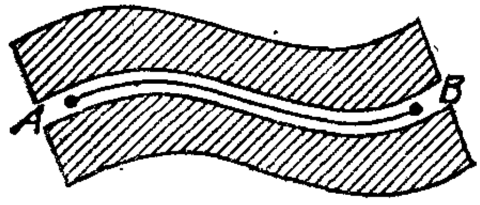


Рис. 112

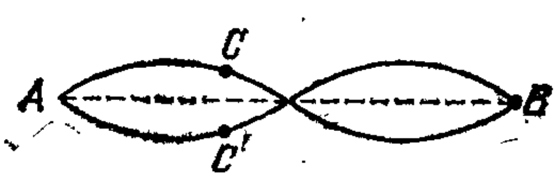


Рис. 113

18.2. Исправление описанной в условии задачи 18.1 проверки состоит в том, чтобы поворот линейки на 180° по плоскости бумаги заменить ее поворотом в пространстве вокруг прямой AB. Если после такой исправленной проверки проведенные отрезки AB совпадут, то линейка имеет ровный край. Действительно, предположив, что какая-то точка C первой из проведенных линий AB не лежит на прямой AB, мы получим, что точка C', симметричная точке

C относительно прямой AB, будет лежать на второй из проведенных линий AB (рис. 113). При этом точки C и C' не совпадут, что будет выявлено при исправленной проверке.

18.3. Линейку можно повернуть по плоскости бумаги на 180°. В случае параллельности краев линейки это приведет к совпадению двух проведенных отрезков CD (через точку C проходит ровно одна прямая, параллельная прямой AB). Если же края линейки не параллельны, то прямые AB и CD пересекаются в некоторой единственной точке O, лежащей где-то очень далеко от точек A, B, C, D. После описанного поворота линейки точка O перейдет в точку O', которая в случае совпадения двух проведенных отрезков CD будет являться еще одной точкой пересечения прямых AB и CD, что невозможно. Таким образом, совпадение отрезков CD означает параллельность краев линейки.

18.4. Проведем прямую AB и, приставив к ней угольник одним катетом, восставим перпендикуляр CD к прямой AB в некоторой точке C (рис. 114). Повернув угольник по плоскости бумаги на 90° вокруг точки C и приставив к прямой AB угольник другим катетом, восставим еще раз перпендикуляр CD к этой прямой в точке C. Если два проведенных отрезка CD совпадут, то угольник имеет прямой угол, а если не совпадут, то используемый для построений угол не является прямым.

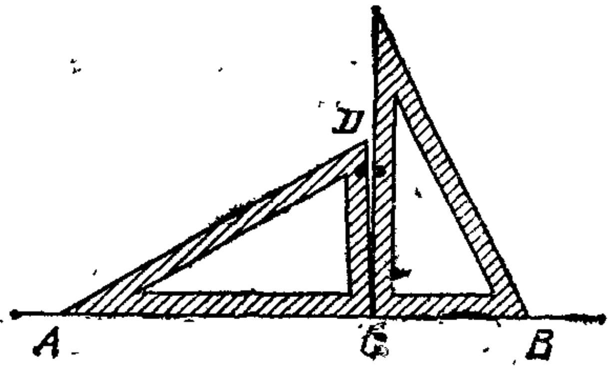


Рис. 114

18.5. Пусть мы проверяем треугольник ABC. Для установления равенства $AB=BC$ достаточно перегнуть треугольник по биссектрисе угла ABC (это делается путем совмещения луча BA с лучом BC) и определить, совмещаются ли при этом точки A и C. Аналогично проверяются равенства $BC=AC$ и $AB=AC$.

18.6. Данный кусок материи не обязательно имеет форму квадрата. Действительно, всем описанным в задаче условиям будет удовлетворять любой ромб, так как обе его диагонали являются его осями симметрии. Кстати, описанную в задаче процедуру можно рассматривать именно как проверку того, является ли четырехугольник ромбом.

18.7. Данный кусок материи не обязательно имеет форму квадрата. Действительно, всем описанным в задаче условиям будет удовлетворять любой прямоугольник, так как обе линии, соединяющие середины его противоположных сторон, являются его осями симметрии. Кстати, описанную в задаче процедуру можно рассматривать именно как проверку того, является ли четырехугольник прямоугольником.

18.8. Необходимо перегнуть четырехугольный кусок материи два раза. В самом деле, одного перегибания явно недостаточно для проверки того, является ли четырехугольник квадратом, так как наличие у него не только одной, а даже двух осей симметрии еще не позволяет утверждать, что четырехугольник есть квадрат (см. задачи 18.6 и 18.7). С другой стороны, если четырехугольник $ABCD$ симметричен относительно диагонали AC и относительно прямой EF, проходящей через середины сторон AB и CD (рис. 115), то он является квадратом. Действительно, применяя в определенном порядке указанные симметрии, получаем равенства $AB=AD=BC=CD$ и $\angle ABC=\angle BAD=90°$, из которых следует, что четырехугольник $ABCD$ является ромбом и прямоугольником, т. е. квадратом.

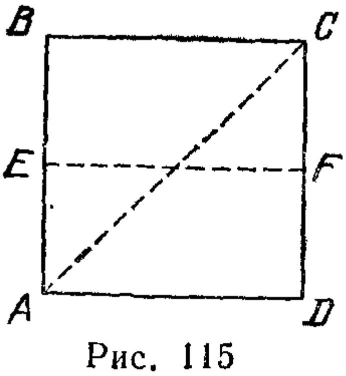


Рис. 115

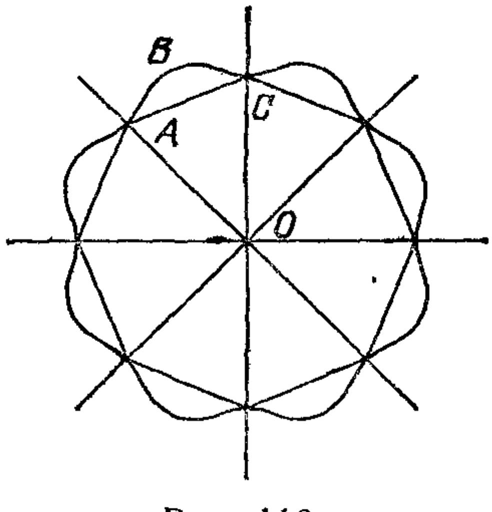


Рис. 116

18.9. Гарантии того, что кусок материи имеет форму круга, дать нельзя, если нам не известно, по каким именно линиям производились сгибания материи. Например, если n этих линий выбраны так, как указано на рис. 116, т. е. делят полный угол на $2n$ одинаковых углов, то кусок материи может оказаться как правильным $2n$-угольником, так и криволинейной фигурой, образованной поворотами какой-нибудь кривой линии типа ABC на углы, кратные углу AOC.

Однако, как это ни удивительно, для проверки того, имеет ли данный кусок материи форму круга, достаточно убедиться, что он имеет всего лишь две оси симметрии, от которых требуется только, чтобы угол между ними измерялся иррациональным числом градусов.

18.10. Перегнув материю поперек тех двух ее краев, параллельность которых подлежит проверке, мы можем совместить один край EA с его продолжением EB по общей их части (рис. 117), а затем проверить, совместился ли при этом другой край FC с его продолжением FD по общей их части (мы подразумеваем, что линия перегиба EF пересекает оба исследуемых края материи). Если на другом крае произошло совмещение, то прямые AB и CD параллельны, так как перпендикуляр EF к прямой AB (углы AEF и BEF равны в силу их симметрии) в этом случае является одновременно и перпендикуляром к прямой CD (углы CFE и DFE также равны в силу их симметрии). Если же на другом крае совмещения не произошло, то прямые AB и CD не параллельны, так как отрезок EF в этом случае перпендикулярен прямой AB, но не перпендикулярен прямой CD.

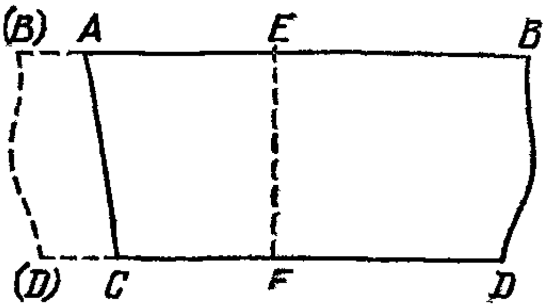


Рис. 117

Теперь найдем указанным способом все пары параллельных противоположных сторон данного четырехугольного куска материи. Если таких пар окажется две, то этот кусок имеет форму параллелограмма, если одна — то трапеции, а если ни одной — то ни то, ни другое.

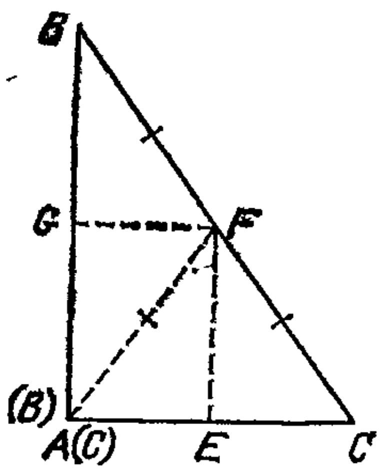


Рис. 118

18.11. Пусть угол A является наибольшим углом треугольника ABC (определить его можно, например, описанными ниже перегибаниями, позволяющими непосредственно сравнивать по величине любые два угла треугольника). Перегнем материю по линии EF (рис. 118) так, чтобы точка C совместилась с точкой A. Перегнем материю, не разворачивая после первого перегиба, по линии FG так, чтобы в результате луч FB совместился с лучом FC. Тогда если после этих двух перегибов точки B и C совместились, то угол A прямой, если отрезок FC оказался длиннее отрезка FB, то угол A острый (рис. 119), а если наоборот, то угол A тупой (рис. 120).

Докажем последнее утверждение. Если точки B и C совместились, то $AF=BF=CF$ и поэтому точки A, B и C лежат на окружности с центром F и диаметром BC, откуда угол CAB прямой. Если $AF=CF\neq BF$, то возьмем на луче FB точку D, удовлетворяющую равенству $DF=CF$ и, следовательно, по доказанному образующую прямой угол DAC. В случае $BF<DF$ имеем $\angle BAC<\angle DAC=90°$, а в случае $BF>DF$ имеем $\angle BAC>\angle DAC=90°$, что и требовалось доказать.

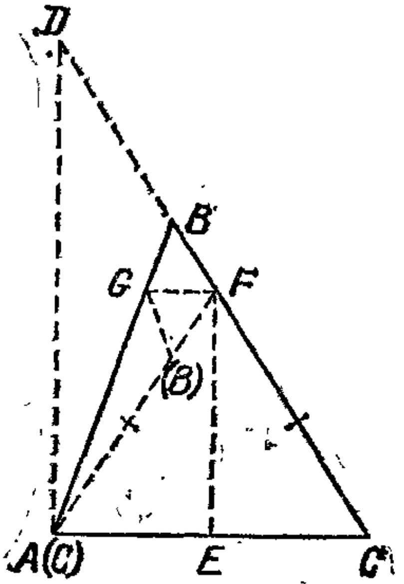


Рис. 119

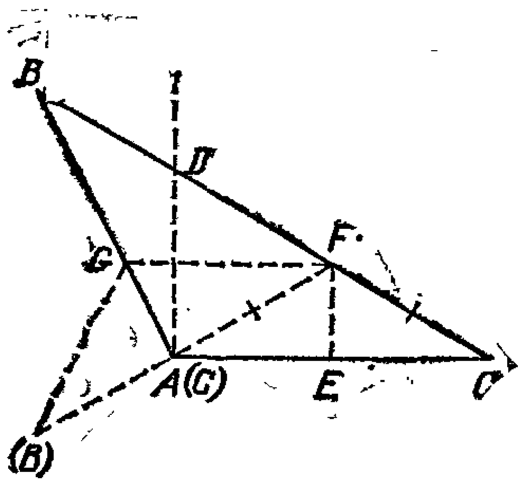


Рис. 120

18.12. Чтобы убедиться в вертикальности шеста (рис. 121), достаточно проверить, что шест находится в одной плоскости с некоторой вертикальной линией, а также в одной (другой) плоскости с некоторой другой вертикальной линией. Указанную проверку можно осуществить с помощью отвеса (бечевки с грузиком на конце): если расположить его перед собой так, чтобы верхние концы отвеса и шеста оказались на одной линии с глазом, то линии отвеса и шеста должны зрительно совпасть.

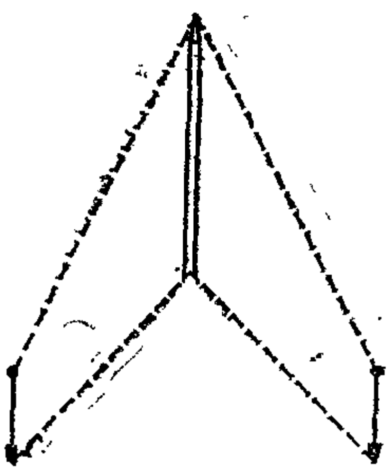


Рис. 121

Для обоснования этого способа проверки заметим, во-первых, что вертикальный шест должен лежать в одной плоскости с любой вертикальной прямой, а, во-вторых, если две параллельные прямые лежат в двух пересекающихся плоскостях соответственно, то эти прямые параллельны и линии пересечения плоскостей.

18.13. Проверка основана на свойстве плоскости содержать вместе с любыми двумя точками прямую, через них проходящую. Однако описанная проверка не позволяет отличить выпуклую поверхность от ровной, так как и у той, и у другой поверхности не будет никакого просвета с ниткой (просвет был бы возможен, если бы нитка могла пройти сквозь поверхность). Для исправления этой проверки можно предложить контролировать себя легким поднятием одного конца нитки: если при этом нитка прикасается к плоскости только другим своим концом, то выпуклости не наблюдается, если же она прикасается где-то в промежуточной точке между концами, то выпуклость есть (рис. 122).

Рис. 122

18.14. Будем предполагать, что стены в комнате вертикальны, а пол горизонтален (рис. 123). Отложим по нижнему краю стен от точки A, лежащей на линии их пересечения, отрезки AB и AC длиной 3 и 4 произвольных единицы, например, дециметров. Тогда угол BAC, представляющий собой линейный угол двугранного угла между стенами, будет прямым тогда и только тогда, когда длина отрезка BC равна 5 единицам (если вас заинтересует вопрос о существовании других целочисленных прямоугольных треугольников, то читайте § 7).

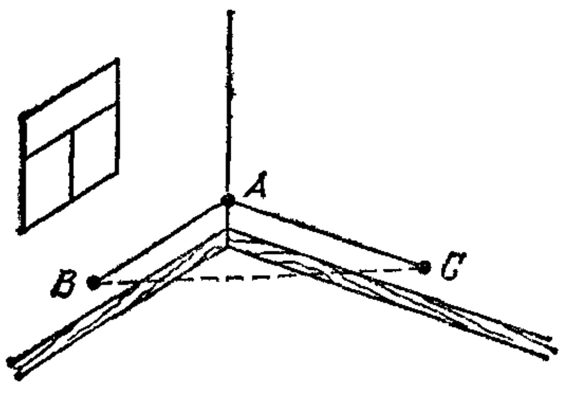


Рис. 123

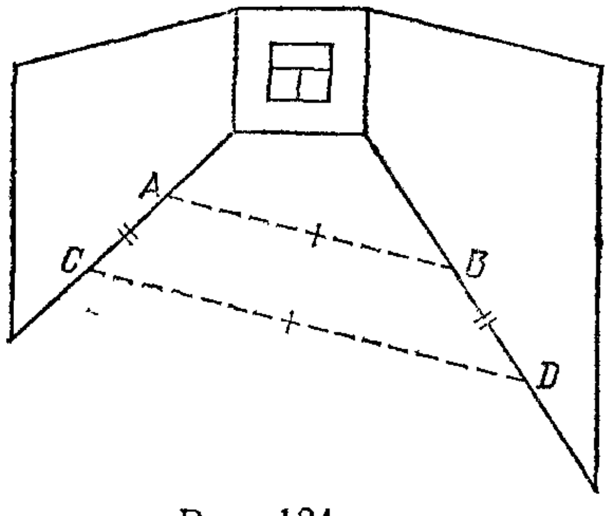


Рис. 124

18.15. Будем предполагать, что стены коридора вертикальны. Выберем у нижнего края каждой из двух стен по одной точке A и B и отложим от этих точек вдоль нижнего края стен (рис. 124) в одном направлении отрезки BD и AC одинаковой длины, например длины AB. Тогда если отрезки AB и CD равны, то стены параллельны, а если эти отрезки не равны, то и стены не параллельны.

В самом деле, из равенств $AB=CD$ и $AC=BD$ следует, что четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм, откуда стороны AC и BD параллельны. С другой стороны, если отрезки AC и BD параллельны, то из равенства $AC=BD$ следует, что четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм и $AB=CD$. Наконец, так как плоскости стен вертикальны, то их параллельность имеет место тогда и только тогда, когда они пересекаются с невертикальной плоскостью пола по параллельным прямым.

18.16. Действия, описанные в п. а), позволяют однозначно установить параллельность двух данных сторон AD и BC четырехугольника $ABCD$. Действительно, если $AD \| BC$, O — точка пересечения диагоналей, E — середина отрезка AD, F — точка пересечения прямых EO и BC

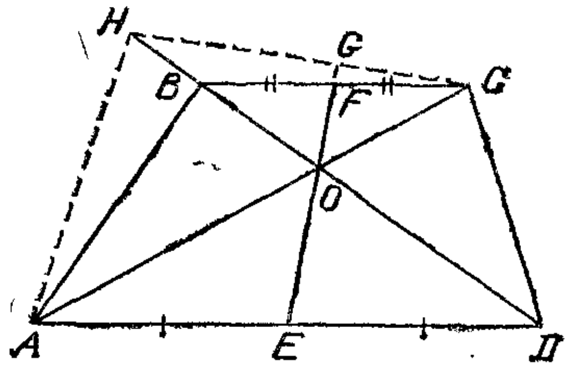


Рис. 125

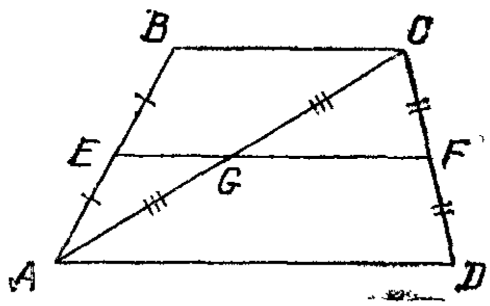


Рис. 126

(рис. 125), то $\angle OAD=\angle OCB$, $\angle ODA=\angle OBC$, $\angle AOE=$ $=\angle COF$, $\angle DOE=\angle BOF$, откуда получаем, что треугольники AOE и COF, а также треугольники DOE и BOF подобны. Поэтому имеем пропорции

$$\frac{AE}{CF}=\frac{OE}{OF}=\frac{DE}{BF},$$

и так как $AE=DE$, то $CF=BF$. Это означает, что отрезок EF, соединяющий середины параллельных сторон AD и CB проходит через точку пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$.

Докажем теперь, что отрезок EG, соединяющий середины непараллельных сторон AD и CH, не проходит через точку O пересечения его диагоналей четырехугольника $ADCH$ (рис. 125). Пусть, напротив, этот отрезок проходит через точку O. Тогда через точку C проведем прямую, параллельную прямой AD, до пересечения в точке B с прямой DH По доказанному выше имеем $CF=BF$, а с другой стороны $CG=GH$, поэтому FG — средняя линия треугольника CBH которая не может пересекать соответствующую ей прямую BH в точке O, что противоречит предположению.

Докажем, что действия п. б) условия задачи также однозначно отвечают на вопрос о параллельности сторон AD

и CB четырехугольника $ABCD$. В самом деле, пусть точка G — середина диагонали AC. Тогда отрезок EF, соединяющий середины сторон AB и DC, равен полусумме сторон AD и CB, т. е. сумме отрезков EG и FG — средних линий треугольников ACB и ADC, в том и только в том случае, если точка G принадлежит отрезку EF (рис. 126). Поскольку $EG \| BC$ и $FG \| AD$, то последнее условие равносильно параллельности отрезка EF сразу двум отрезкам BC и AD, т. е. параллельности самих сторон AD и CB, что и требовалось доказать.

Таким образом, для проверки того, что данный четырехугольник $ABCD$ является трапецией, достаточно соединить отрезком середины двух его противоположных сторон и проверить ровно одно из двух условий: либо этот отрезок равен полусумме двух других сторон четырехугольника (которые тогда как раз и будут основаниями трапеции, а в противном случае ими будут другие стороны), либо этот отрезок проходит через точку пересечения диагоналей. Если оба условия одновременно окажутся выполненными, то четырехугольник $ABCD$ есть не трапеция, а параллелограмм.

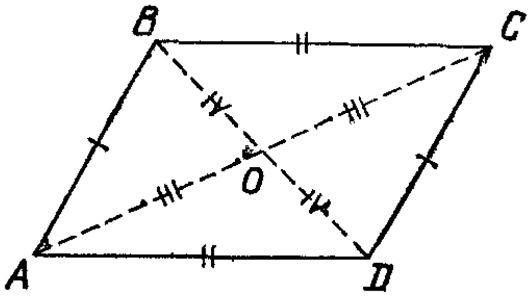


Рис. 127

18.17. Заметим, что если четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, то все свойства, перечисленные в пп. а), б), в) условия задачи, для него выполнены. Пусть теперь $AB=CD$ и $AD=BC$ (рис. 127), тогда треугольники ABC и ADC равны по трем сторонам, откуда

$$\angle ACB=\angle CAD, \quad \angle BAC=\angle DCA,$$

т. е. противоположные стороны четырехугольника $ABCD$ попарно параллельны. Итак, свойство а) является и необходимым, и достаточным для параллелограмма.

О свойстве б) этого сказать нельзя, поскольку оно выполняется не только для параллелограмма, но и для любой равнобедренной трапеции (докажите, что ни для каких других выпуклых четырехугольников оно не выполняется).

Наконец, свойство в) является достаточным для того, чтобы объявить четырехугольник $ABCD$ параллелограммом, поскольку равенство отрезков AO и CO, а также BO и DO (рис. 127) влечет за собой равенство треугольников AOB

и COD, а также AOD и BOC, откуда в свою очередь вытекает равенство противоположных сторон четырехугольника.

18.18. Для ответа на поставленный в задаче вопрос достаточно проверить, что замкнутая ломаная $ABCDA$ ограничивает четырехугольник, который, согласно определению ромба, уже и будет ромбом. Действительно, так как равнобедренные треугольники ABC и ADC равны, то точки B и D находятся по разные стороны относительно прямой AC (иначе эти точки просто совпали бы друг с другом). Поэтому отрезок AB не пересекается с отрезком CD, а отрезок AD не пересекается с отрезком BC, т. е. ломаная $ABCDA$ несамопересекающаяся, а, значит, ограничивает настоящий ромб $ABCD$.

18.19. Свойство, описанное в п. а), не является достаточным для того, чтобы объявить четырехугольник прямоугольником, поскольку это свойство выполняется также и для любой равнобедренной трапеции (докажите, что ни для каких других выпуклых четырехугольников оно не выполняется).

Свойства б) и в) достаточны, чтобы объявить четырехугольник прямоугольником. Действительно, из попарного равенства противоположных сторон четырехугольника вытекает, что он является параллелограммом (см. задачу 18.17), откуда получаем, что его диагонали делятся точкой их пересечения пополам, причем если сами диагонали равны, то равны и их половинки. Итак, из свойства б) вытекает свойство в). Наконец, если для четырехугольника выполнено свойство в), то точка O пересечения его диагоналей равноудалена от его вершин. Это означает, что точка O является центром описанной около четырехугольника окружности, а его диагонали являются диаметрами этой окружности, на которые опираются вписанные углы при вершинах четырехугольника. Следовательно, все эти углы прямые, что и требовалось доказать.

18.20. Заметим, что для квадрата выполняются все свойства а), б), в), перечисленные в условии задачи. Однако свойство а) выполняется не только для квадрата, но и вообще для любого ромба (и только для него, согласно задаче 18.18). Свойство в) выполняется также и для любой равнобедренной трапеции, у которой одно из оснований равно боковой стороне (докажите, что ни для каких других выпуклых четырехугольников оно не выполняется). Наконец, если для четырехугольника выполнено свойство б), то этот четырехугольник является ромбом (см. задачу 18.18) и прямоугольником (см. задачу 18.19) одновременно, а значит, и квадратом.

18.21. Вписанный равносторонний многоугольник обязательно является правильным (см. задачу 15.1), а вот описанный — не обязательно. Например, любой ромб, в который всегда вписывается окружность (так как его центр симметрии равноудален от всех четырех сторон), является равносторонним, но не правильным четырехугольником.

Полезно знать все же, что для правильности описанного нечетноугольника достаточно (и, разумеется, необходимо), чтобы он был равносторонним. Например, вершины A и C (расположенные через одну на рис. 128) равностороннего описанного пятиугольника равноудалены от центра O вписанной в него окружности. Действительно, так как $AB=BC$ и $DB=BE$ (отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки B, равны), откуда $AD=EC$, и раз $OD=OE$ и $\angle ADO=\angle CEO=90°$, то треугольники ADO и CEO равны. Двигаясь от вершины A через одну, мы перечислим все вершины пятиугольника, которые, таким образом, будут все равноудалены от точки O. Поэтому указанный пятиугольник одновременно является вписанным и, стало быть, правильным.

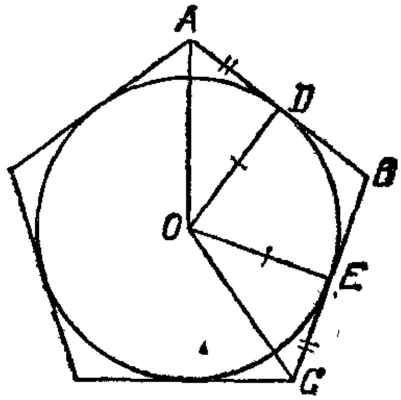


Рис. 128

18.22. Пятиугольник с равными диагоналями не обязательно правилен. Это утверждение подтверждается пятиугольником $AEDCB$, построенным следующим образом (рис. 129): пусть в равнобедренном треугольнике ADB угол

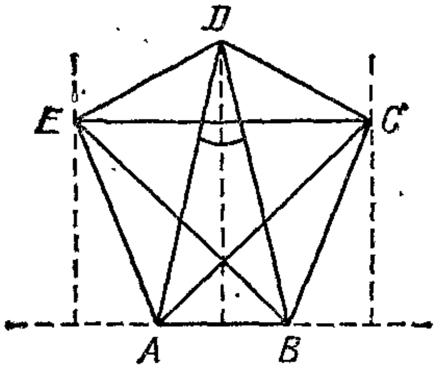


Рис. 129

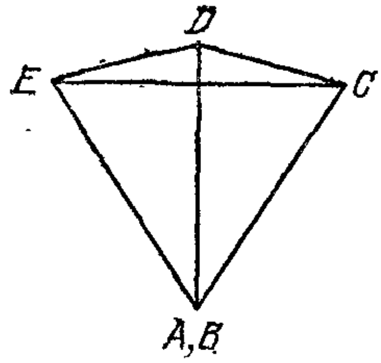


Рис. 130

при вершине D меньше 36°, тогда проведем перпендикуляры к прямой AB, удаленные от точки D на расстояние, равное половине AD, и выберем на них точки C и E, удаленные от точек A и B соответственно на расстояние AD. В построенном пятиугольнике все пять диагоналей равны между собой (по построению они равны диагонали AD), однако сам пятиугольник не является правильным, поскольку угол между диагоналями, выходящими из одной вершины правильного пятиугольника, равен 36°, а у нас получилось неравенство

$$\angle ADB < 36°.$$

Заметим, что более убедительным, хотя и менее строгим примером может служить вырожденный пятиугольник $AEDCB$ со слившимися вершинами A и B, изображенный на рис. 130 и полученный из равностороннего треугольника AEC добавлением еще одной вершины D, удаленной от вершины A на расстояние AC, и раздвоением вершины A на две вершины A и B.

Приемом построения вырожденных контрпримеров мы воспользуемся при решении следующих задач, а при желании вы сможете сами слегка подправить построения так, чтобы они были невырожденными.

18.23. Наименьшее число равных диагоналей, необходимых для проверки правильности равностороннего пятиугольника $ABCDE$, равно трем. Действительно, двух равных диагоналей для этого недостаточно: пример вырожденного пятиугольника, превратившегося в трапецию с равными диагоналями BD и CE, изображен на рис. 131. Если

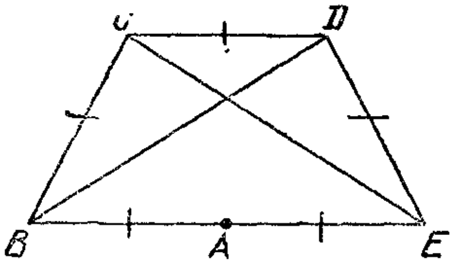


Рис. 131

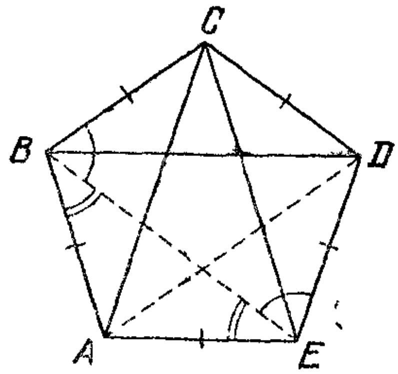


Рис. 132

же у равностороннего пятиугольника $ABCDE$ равны три диагонали, скажем AC, BD и CE (а на самом деле любые три диагонали — попробуйте доказать это самостоятельно), из равенства треугольников ABC, BCD и CDE (по трем сторонам) вытекает равенство углов пятиугольника при вершинах B, C и D (рис. 132). Кроме того, из равенства треугольников ABD и ACD (по трем сторонам) имеем $\angle BAD = \angle CDA$, откуда с учетом равнобедренности треугольника AED получаем равенство углов пятиугольника при вершинах A и D. Аналогично доказывается равенство углов при вершинах B и E, т. е. равенство всех углов и, значит, правильность пятиугольника $ABCDE$.

18.24. Условие а) в дополнение к тому, что три главные диагонали равностороннего шестиугольника пересекаются в одной точке, не обеспечивает его правильности. Например, вырожденный шестиугольник $ABCDEF$, превратившийся в прямоугольник и изображенный на рис. 133, удовлетворяет всем перечисленным условиям, но не является

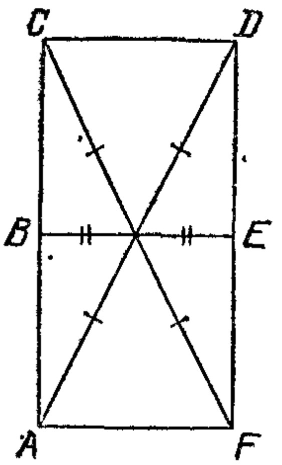


Рис. 133

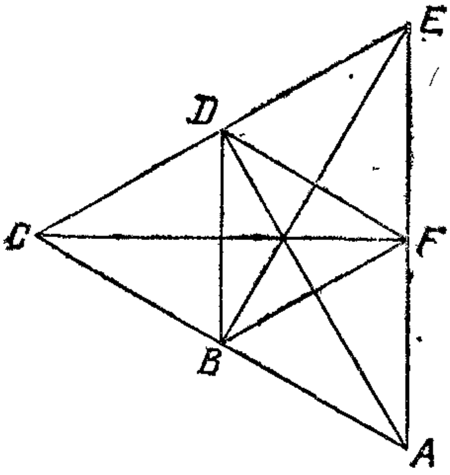


Рис. 134

правильным. Аналогично обстоит дело и с условием в), для которого контрпримером служит вырожденный шестиугольник $ABCDEF$, превратившийся в треугольник и изображенный на рис. 134 (в нем главные диагонали AD, CF и EB равны и пересекаются в одной точке, неглавные диагонали образуют равносторонние треугольники ACE и BDF).

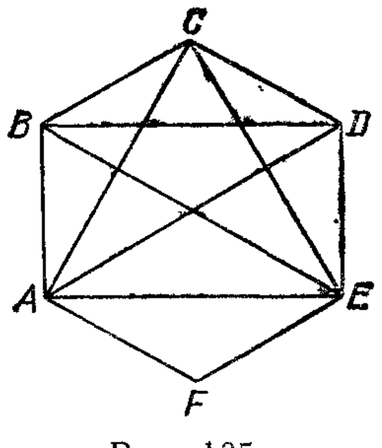
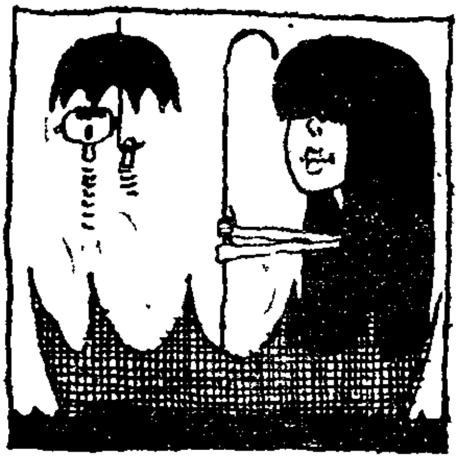


Рис. 135

Если же выполнено условие б), то около шестиугольника можно описать окружность с центром в точке пересечения его главных диагоналей, а коль скоро сам шестиугольник является еще и равносторонним, то он обязательно правильный (см. задачу 18.21).

18.25. Наименьшее число диагоналей, которое нужно проверить, равно четырем. В том, что трех диагоналей недостаточно, можно убедиться непосредственным перебором различных случаев. Если же в равностороннем шестиугольнике $ABCDEF$ равны четыре неглавные диагонали AC, CE, EA и BD (рис. 135), то этот шестиугольник правильный. Действительно, углы шестиугольника при вершинах B, C, D и F равны в силу равенства треугольников ABC, BCD, CDE и EFA (по трем сторонам), а углы при вершинах C, E и A также равны, поскольку они представляют собой одинаковые суммы углов (один из которых есть угол при вершинах C, E или A равностороннего треугольника ACE, а два других являются углами при основаниях одинаковых равнобедренных треугольников ABC, CDE или EFA). Таким образом, все углы равностороннего шестиугольника $ABCDEF$ равны; следовательно, он правильный.



§ 19. МАЛЕНЬКИЕ ХИТРОСТИ

Книга подходит к концу. И если до сих пор к каждой задаче давалось достаточно подробное решение, то в настоящем параграфе вам представляется возможность решать задачи в большей степени самостоятельно.

Некоторые из предложенных ниже задач, возможно, покажутся вам слишком простыми, но и в таких случаях советуем не торопиться с ответом — можно попасть впросак. Приведенные решения в большинстве случаев очень кратки, они скорее напоминают указания к решениям. Вдумчивому читателю было бы полезно попробовать доказать самостоятельно сформулированные нами утверждения.

Большинство ситуаций, описанных в настоящем параграфе, встречаются в повседневной жизни и являются естественными. Однако для своего разрешения они порой требуют некоторой изобретательности и смекалки — этим и объясняется название параграфа.

19.1. Экономный счет

У продавца в киоске конверты сложены в пачки по 100 штук. Как ему быстрее отсчитать 75 конвертов?

19.2. Стопка бумаги

Как можно быстро определить примерное количество листов бумаги, содержащихся в данной большой стопке?

19.3. *Множественная регистрация*

Вам нужно обработать огромную стопку анкет, каждая из которых содержит по несколько пунктов. Как нужно организовать одновременный подсчет тех или иных анкетных данных, чтобы, просмотрев всю стопку только один раз, можно было выдать исчерпывающую статистику по интересующим вас вопросам?

19.4. Гвозди в ящике

Как приблизительно сосчитать число гвоздей в ящике?

19.5. День отъезда — день приезда

Вы уехали в командировку 24 марта, а вернулись 31 марта. Сколько дней вы были в командировке?

19.6. Перекладывание конфет

В двух пакетах лежат конфеты, причем в одном пакете на 10 конфет больше, чем в другом. Сколько конфет нужно переложить из одного пакета в другой, чтобы в них конфет стало поровну?

19.7. Заготовка дров

Из трехметровых и четырехметровых бревен одинаковой толщины нужно заготовить машину дров, распилив бревна на куски длиной по одному метру. Какие бревна выгоднее пилить?

19.8. Пешком по ступеням

Во сколько раз путь по лестнице на 16-й этаж дома длиннее пути на 4-й этаж?

19.9. Как разыскать нужную квартиру

В одном из подъездов шестнадцатиэтажного дома на первом этаже находятся квартиры с номерами 65, 66, 67 и 68. В каком подъезде и на каком этаже находится квартира с номером 165?

19.10. Пирожок без бульона

Находясь в столовой, вы прочитали в меню, что порция бульона с пирожком стоит 31 копейку, а половина порции бульона с пирожком стоит 23 копейки. Сколько стоит пирожок?

19.11. Сдавая посуду

В буфете продается лимонад в бутылках стоимостью 30 копеек. Пустую бутылку можно вернуть, получив за нее 20 копеек. Какое наибольшее количество лимонада можно выпить, имея при себе 1 рубль?

19.12. В единую цепь

Четыре обрывка цепи, содержащих по 2 звена каждый, нужно соединить в одну цепь. Можно ли это сделать, расклепав, а затем снова заклепав меньше, чем три звена?

19.13. Общий сейф

Три инженера имеют общий сейф. Как запереть этот сейф, чтобы открывать его можно было только при одновременном присутствии или при согласии всех трех инженеров?

19.14. Общая лодка

Три рыбака имеют общую лодку, и у каждого из них есть свой замок и ключ к нему. Как прицепить лодку к берегу, чтобы любой из рыбаков мог ее отцепить с помощью одного только своего ключа.

19.15. Подбор ключей

Вы рассыпали связку из 10 ключей от 10 дверей. Каждый ключ подходит только к одной двери. Как за наименьшее число попыток восстановить соответствие между ключами и дверями?

19.16. Пара носков

В ящике комода лежат в беспорядке 20 носков: 10 коричневых и 10 черных. Какое наименьшее количество носков достаточно извлечь не глядя из ящика, чтобы среди них наверняка можно было выбрать пару одинаковых носков?

19.17. Пара перчаток

В ящике комода лежат в беспорядке 20 перчаток: 5 пар коричневых и 5 пар черных. Какое наименьшее количество перчаток достаточно извлечь не глядя из ящика, чтобы среди них наверняка можно было выбрать пару одноцветных перчаток?

19.18. Трюк с перчатками

Лаборанту-химику предстоит работать поочередно с тремя реактивами, вредными для кожи рук. Может ли он обойтись только двумя парами перчаток, если известно, что при работе с любым из этих реактивов на внешней поверхности перчаток непременно остаются частицы реактива, контакт которого с другими реактивами недопустим?

19.19. Угольник в кармане

Из куска обыкновенной веревки можно устроить прямоугольный треугольник без использования линейки, транспортира и т. д. Как это сделать?

19.20. Скрепить узлом

При обвязывании коробки веревкой часто приходится пересекать ранее сделанные витки. Придумайте способ, как скреплять пересекающиеся веревки узлом, не разрезая самих веревок.

19.21. Одним росчерком

Вам нужно прострочить на одежде одну из эмблем, изображенных на рис. 136. Можно ли это сделать, не разрывая

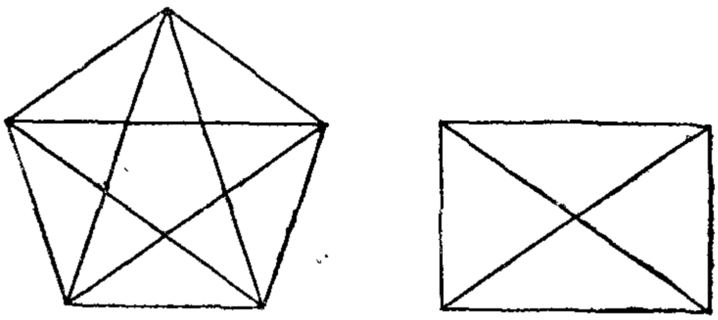


Рис. 136

нитку в процессе шитья и не проходя ни по одной линии эмблемы дважды?

19.22. Каркас куба

Можно ли из целого куска проволоки длиной менее 1,5 м изготовить каркас куба с ребром 1 дм?

19.23. Экономное разрезание

Разделите 5 яблок на 6 человек так, чтобы ни одно яблоко не пришлось разрезать на 6 частей.

19.24. На троих и четверых одновременно

Вы купили торт для гостей, но не знаете точно, сколько всего будет человек — трое или четверо. Какое наименьшее число разрезов вы должны заранее сделать, чтобы в любом случае без дополнительных разрезов все могли получить торта поровну?

19.25. На восьмерых

Какой торт можно разделить на восемь равных частей тремя прямыми разрезами?

19.26. Отмерить без измерений

Как от куска материи длиной 8 м отрезать кусок длиной 5 м, не имея под рукой измерительных инструментов?

19.27. Усадка материи

Во время стирки материя садится на $\frac{1}{16}$ по длине и на $\frac{1}{18}$ по ширине. Сколько метров материи шириной 0,9 м надо купить, чтобы после стирки иметь 51 м^2?

19.28. Велик ли оставшийся кусок?

После стирки кусок мыла уменьшился на $\frac{1}{6}$ часть как по ширине, так и по высоте. На сколько таких же стирок хватит оставшегося куска мыла?

19.29. Статистическое исследование

В одном городе Канады 70% жителей знают французский язык и 80% — английский язык. Сколько процентов жителей этого города знают оба языка?

19.30. Эффект снижения цены

Пусть цены на какие-то товары снижены на 20%. На сколько процентов больше можно купить этих товаров по сниженной цене на отведенную для них сумму?

19.31. Денежный перевод

За пересылку денег по почте с отправителя взимают 2% переводимой суммы. Какую наибольшую сумму денег можно перевести, имея на руках ровно 100 рублей?

19.32. Размеры и цены

На рынке продаются два арбу́за разных размеров: один арбуз в обхвате на четверть больше другого, зато в полтора раза дороже. Какой арбуз выгоднее купить?

19.33. Покупка мандаринов

Какие мандарины — крупные или мелкие — выгоднее покупать, если толщина кожуры у них одинакова?

19.34. Хозяйке на заметку

Какую картошку выгоднее чистить: крупную или мелкую?

19.35. Кажущаяся половина

Из фужера конической формы, наполненного соком (рис. 137), отпили такую часть содержимого, что его высота уменьшилась вдвое. Какая часть была отпита?

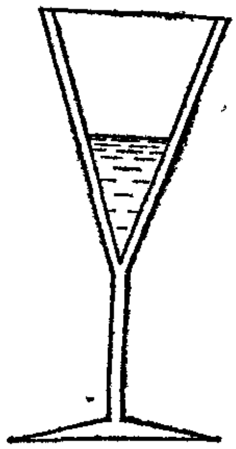


Рис. 137

19.36. Две кружки

Одна кружка вдвое ниже другой, зато в полтора раза шире. Какая из двух кружек вместительнее?

19.37. Ровно полкружки

Кружка цилиндрической формы наполнена доверху молоком. Можно ли отлить ровно половину содержащегося в ней молока, не пользуясь измерительными приборами?

19.38. Часть кюветы

Вы хотите научиться заполнять водой для приготовления раствора какую-либо фиксированную часть кюветы (ванночки), имеющей форму прямоугольного параллелепипеда. Какие порции воды вы можете наливать, не пользуясь измерительными приборами и не делая отметок на стенках кюветы?

19.39. Объем бутылки

Как, пользуясь одной лишь линейкой с делениями, определить полную вместимость круглой бутылки, частично заполненной жидкостью?

19.40. Объем любой фигуры

Нужно вычислить объем небольшого предмета неправильной формы (камня, слитка и т. п.). Как это сделать?

19.41. Толщина слоя краски

Вы покрасили пол в своей квартире. Можно ли приблизительно определить толщину получившегося при этом слоя краски?

19.42. Переливая воду

Имеются пятилитровая банка и четырехлитровая кастрюля. Для приготовления супа надо налить в кастрюлю 3 л воды из-под крана. Как это сделать?

19.43. Разделить пополам

В ведре содержится 10 литров молока. Требуется с помощью пустой трехлитровой банки и пустого семилитрового бидона распределить молоко так, чтобы в ведре и бидоне его оказалось по 5 литров. Как это сделать наименьшим числом переливаний?

19.44. Одной гирей

Нужно отвесить на чашечных весах 13 кг сахарного песку при наличии всего лишь одной килограммовой гири. Конечно, 13 взвешиваний для этого вполне достаточно. Нельзя ли, однако, обойтись существенно меньшим их числом?

19.45. Оптимальный набор гирь

Каким наименьшим числом и каких именно гирь нужно запастись, чтобы с их помощью можно было отвесить любое целое число килограммов от 1 до 13 при условии, что гири разрешается класть

а) только на одну чашку весов;

б) на обе чашки весов?

19.46. На грубых весах

Положите копейку на обычные весы со стрелкой (которые имеются практически в любом магазине) и попробуйте таким образом определить вес монеты. Вряд ли вам удастся это сделать, поскольку стрелка весов отклонится слишком незначительно. Как же все-таки взвесить копейку на таких весах?

19.47. Расставить по порядку

Вы хотите расположить несколько данных предметов в порядке возрастания их весов. Для этого вы можете выбирать любые два предмета и сравнивать их друг с другом, кладя их на разные чашки весов (без стрелок и без гирь). Конечно, можно было бы сравнить каждый предмет с каждым, но при этом, по всей видимости, была бы проделана лишняя работа.

Какое наименьшее число сравнений является заведомо достаточным, если количество предметов равно: а) 3; б) 4; в) 5?

19.48. Формула для максимума

Предположим, что калькулятор имеет помимо четырех арифметических операций также и операцию взятия абсолютной величины числа. Придумайте формулу, по которой на этом калькуляторе можно найти наибольшее из двух произвольных чисел.

19.49. Перевозка ящиков

Вес нескольких ящиков с грузом в общей сложности составляет 10 т, причем каждый ящик весит не более 1 т. За какое наименьшее количество поездок трехтонная машина заведомо сможет перевезти весь этот груз?

19.50. На неправильных весах

Вы хотите отвесить 2 кг сахару на неравноплечих чашечных весах с помощью одной килограммовой гири. Подумайте над вопросом: больше или меньше 2 кг сахару вы получите, если отвесите 1 кг на одной чашке весов и еще 1 кг на другой? Можно ли на таких весах отвесить ровно 2 кг?

19.51. Простейшие весы

Знаете ли вы, что весы можно изготовить из самой обыкновенной линейки с делениями для взвешивания, на которой нужна всего одна гиря? Если не знаете, то придумайте, как это сделать.

19.52. Сверка часов

Вы хотите установить более точное время на стенных часах в вашем доме. Ближайшие часы находятся в нескольких минутах ходьбы и показывают правильное время, однако отнести туда стенные часы вы не можете.

Как поступить?

19.53. Распределение работы

Одна машинистка печатает страницу текста в среднем за 6 минут, а другая — за 10 минут. В каком отношении нужно распределить между ними работу по печатанию рукописи, чтобы эта работа была завершена в кратчайшее время?

19.54. Без замены шин

Зная, через сколько километров пути стираются шины на передних и задних колесах легкового автомобиля, придумайте способ, как максимально удлинить его пробег, не заменяя шин ни на одном из четырех колес автомобиля.

19.55. Суммарный эффект

Внедрение одного изобретения сокращает производственные затраты на 50%, второго — на 40%, а третьего — на 10%. На сколько процентов позволит сократить производственные затраты внедрение всех трех изобретений сразу?

19.56. Постоянное пастбище

На лугу растет трава. На этот луг пустили 30 коров, которые за 4 дня съели всю траву. Когда на лугу снова выросла трава, на него пустили 25 коров, которые съели всю траву за 6 дней. Какое наибольшее количество коров может пастись на лугу все время (пока вообще растет трава)?

19.57. Обойдя вокруг

Парашютист приземлился ночью около стены, окружающей некоторый участок земли в форме многоугольника. Пройдя вдоль всей стены и замерив какие-то углы, парашютист определил, где он находится: внутри участка или снаружи.

Как он это выяснил?

19.58. Как установить табуретку

Пол в вашей комнате не очень ровный, зато табуретка совершенно ровная, т. е. нижние концы ее ножек лежат в одной плоскости и образуют квадрат. Как наиболее простым способом установить табуретку, чтобы она не качалась?

19.59. Диагональ кирпича

Для того, чтобы найти длину главной диагонали кирпича, т. е. расстояние между наиболее удаленными его вершинами, можно измерить линейкой, например, длину, ширину и высоту кирпича, а затем воспользоваться теоремой Пифагора. Предложите способ измерения линейкой главной диагонали, не требующий никаких вычислений.

19.60. Диаметр проволоки

Как измерить с помощью линейки диаметр очень тонкой проволоки?

19.61. Не разматывая рулон

Бумажная лента свернута в рулон. Как с помощью линейки определить примерную длину ленты, не разматывая весь рулон целиком?

19.62. Радиус пластинки

У вас в руках оказался осколок круглой пластинки. Можно ли по этому осколку определить радиус целой пластинки?

19.63. Объем шара

Как с помощью измерительной ленты (сантиметра) определить объем данного шара?

19.64. С маяка

Как далеко видно с маяка данной высоты над уровнем моря?

19.65. Радиус шара

У вас есть циркуль, линейка, карандаш и бумага. Можете ли вы с их помощью построить отрезок, равный радиусу бильярдного шара, помня, конечно, что прямые линии на сфере рисовать невозможно.

19.66. Наибольший участок

Вам нужно отгородить забором фиксированной длины прямоугольный участок. Каким должен быть этот участок, чтобы его площадь была наибольшей?

19.67. Наибольший палисадник

У стены дома нужно разбить прямоугольный палисадник, отгородив три его стороны забором фиксированной длины. При каком отношении этих сторон площадь палисадника будет наибольшей?

19.68. Наибольшая коробка

Из квадратного листа картона нужно сделать коробку, отрезав от каждого из углов по квадратику (на рис. 138 эти квадратики заштрихованы) и загнув боковые стенки. Каким должно быть отношение высоты коробки к стороне ее основания, чтобы объем коробки был наибольшим?

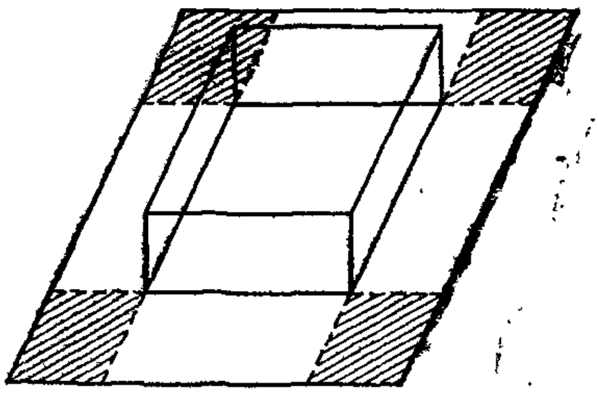


Рис. 138

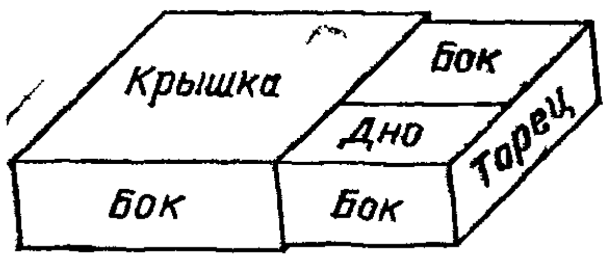


Рис. 139

19.69. Оптимальная форма

Все вы видели, как устроен обычный спичечный коробок: он имеет в общей сложности 2 торцевые стенки, 1 крышку, 2 дна и 4 боковые стенки (рис. 139). Какой должна быть форма коробка с фиксированным объемом, чтобы на его изготовление затрачивалось наименьшее количество материала?

19.70. Электропроводка

Требуется соединить стенной проводкой выключатель и лампочку в зале длиной 30 м, а шириной и высотой по 12 м (рис. 140). Выключатель находится посреди торцевой стены на высоте 1 м от пола, а лампочка находится посреди противоположной стены на расстоянии 1 м от потолка.

По какому кратчайшему пути должна проходить проводка?

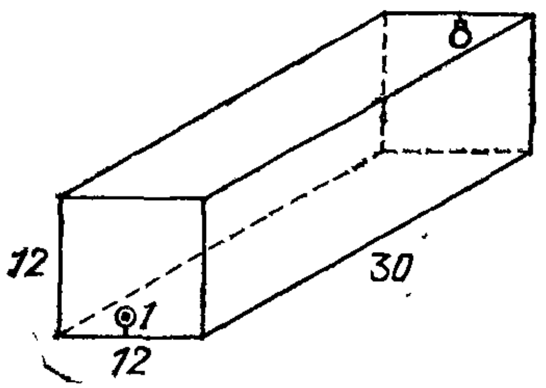


Рис. 140

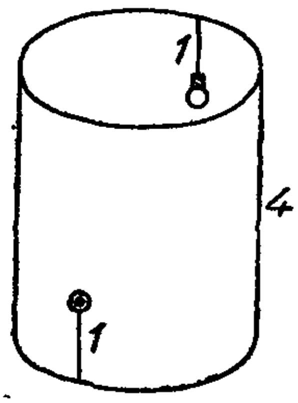


Рис. 141

19.71. Не пробивая стенку

На внутренней стенке открытого сверху цилиндрического бункера, сечение которого имеет длину окружности 6 м, а высота которого равна 4 м, находится лампочка на расстоянии 1 м от верха. Напротив лампочки снаружи бункера на высоте 1 м от пола находится выключатель (рис. 141).

Какой наименьшей длины провод нужен для проведения стенной проводки между выключателем и лампочкой, не пробивая стенку?

19.72. Не мала ли салфетка?

Можно ли завернуть единичный кубик в квадратную салфетку размером 3×3?

19.73. Наибольшая площадь

Из прямоугольного треугольника нужно вырезать прямоугольник так, чтобы одна из его вершин совпадала с вершиной прямого угла треугольника, две другие вершины лежали на катетах и одна вершина на гипотенузе, а площадь его была наибольшей.

19.74. Наименьшая площадь

Через данную точку внутри угла нужно провести прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшей площади. Как это сделать?

19.75. Треугольник из круга

Из какого наименьшего бумажного круга можно вырезать треугольник, стороны которого равны 2, 3 и 4?

19.76. Лучший гвоздь

В бревно вбито три гвоздя одинаковой длины и массы, но разного сечения: круглый, квадратный и треугольный. Какой из гвоздей держится крепче?

19.77. Не пересчитывая ответ

Лист бумаги разорвали на 4 части, затем какие-то из этих частей разорвали на 4 части и т. д. Когда сосчитали общее число частей, то их оказалось то ли 66, то ли 67. Можно ли, не пересчитывая, уточнить ответ?

19.78. На несколько квадратов

Бумажный квадрат требуется разрезать на несколько более мелких квадратов, не обязательно одинаковых. Каким может быть их количество?

19.79. Плитка шоколада

Вы хотите разломать плитку шоколада на мелкие квадратные дольки, из которых она состоит. Какое наименьшее число разломов вам для этого потребуется сделать при условии, что разные куски шоколада нужно ломать отдельно?

19.80. Раскраска карты

Территория страны разбита на области прямыми линиями. Какое наименьшее число красок необходимо для такой раскраски карты страны, чтобы никакие две области, имеющие общую границу, не оказались одного цвета?

19.81. Огромная дыра

Сумеете ли вы разрезать лист из школьной тетради так, чтобы в итоге образовалось кольцо, через которое мог бы свободно пролезть взрослый человек?

19.82. Треугольный паркет

Из правильных треугольников можно сложить паркет, т. е. замостить ими всю плоскость без наложений и дыр.

А можно ли сложить паркет из произвольных неправильных, но все же одинаковых треугольников?

19.83. Четырехугольный паркет

Из каких одинаковых четырехугольников можно сложить паркет?

19.84. Пятью прямыми

Проведите 5 прямых, каждая из которых делит заданный прямоугольник на 2 равные части.

19.85. Дырявый прямоугольник

Внутри прямоугольного листа бумаги вырезана дырка, имеющая форму параллелограмма (рис. 142). Предложите какой-нибудь способ, как разрезать этот лист на две части одинаковой площади.

19.86. Треугольник наизнанку

Вы вырезали из цветной бумаги треугольник, да, как выяснилось, у него цветной оказалась не та сторона. Как разрезать этот треугольник на части, чтобы, перевернув их обратной стороной, можно было сложить его снова?

19.87. Площадь пополам

Из бумаги вырезан выпуклый четырехугольник. По какой линии, проходящей через данную его вершину, нужно провести разрез, чтобы четырехугольник разделился на две части одинаковой площади?

19.88. Теорема Пифагора

На сторонах прямоугольного треугольника построены

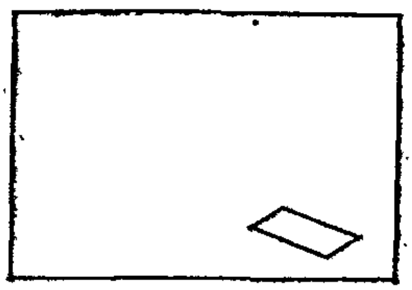


Рис. 142

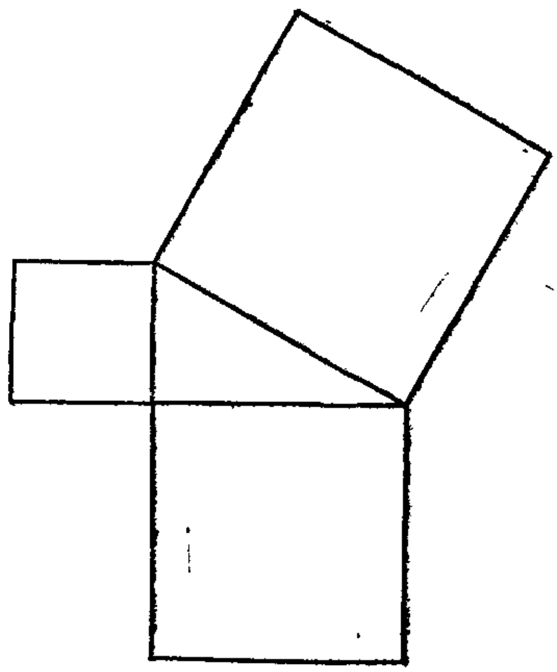


Рис. 143

квадраты (рис. 143). Согласно теореме Пифагора, площадь наибольшего из них равна сумме площадей двух меньших.

Попробуйте продемонстрировать этот факт, вырезав два меньших квадрата и разрезав их на такие части, из которых можно составить большой квадрат.

19.89. Плотное заполнение

Можно ли ящик размером $20\times15\times14$ заполнить коробками размером $3\times5\times10$ так, чтобы в ящике не осталось пустот и из него не выступали коробки?

19.90. Заготовки для пельменей

Из квадратного листа теста размером 8×8 нужно вырезать круги диаметром 1 для изготовления пельменей. Можно ли разместить на этом листе более 64 кругов?

19.91. На почтительном расстоянии

Можно ли на круглом поле диаметром 1 км пробурить 125 скважин так, чтобы расстояние между любыми двумя скважинами было больше 100 м?

19.92. Перпендикуляр к диаметру

Дана окружность диаметром AB. Из некоторой точки, не лежащей на прямой AB, нужно опустить перпендикуляр к этой прямой. Можно ли это сделать, используя только линейку (без делений)?

19.93. Вместо транспортира — линейка

С помощью линейки (без делений) с параллельными краями проведите биссектрису данного угла.

19.94. Угол с недоступной вершиной

С помощью линейки с параллельными краями проведите биссектрису угла, вершина которого находится за пределами листа бумаги.

19.95. Разделить линейкой без делений

При помощи линейки (без делений) с параллельными краями разделите отрезок пополам.

19.96. Центр окружности

При помощи линейки с параллельными краями найдите центр данной окружности.

19.97. Двусторонней линейкой

Можно ли с помощью двусторонней линейки построить перпендикуляр к данной прямой?

19.98. Линейкой с делениями

При помощи обычной линейки с делениями проведите биссектрису данного угла.

19.99. Обыкновенным угольником

Найдите центр данной окружности при помощи угольника.

19.100. Найти середину

Как с помощью одного угольника разделить данный отрезок пополам?

19.101. Шоколадкой как линейкой

Вы положили плитку шоколада на бумагу, обвели ее карандашом и хотите найти точку пересечения диагоналей нарисованного прямоугольника. Можно ли это сделать, используя в качестве линейки ту же плитку, несмотря на то, что ее длины не хватает для проведения диагоналей?

19.102. К недоступному центру

На самом краю листа нарисована дуга окружности, центр которой не помещается на бумаге. Через данную точку проведите прямую, проходящую через этот центр.

19.103. Перпендикуляр на краю листа

На листе бумаги, имеющем рваный край (рис. 144), с помощью циркуля и линейки восстановите перпендикуляр к прямой стороне AB через ее концевую точку A.

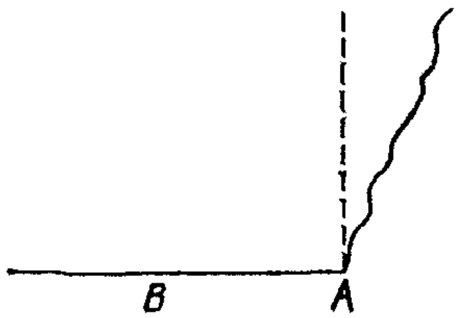


Рис. 144

19.104. Циркулем, но не окружность

Можно ли с помощью циркуля нарисовать на бумаге не окружность, а овал?

19.105. Точки на прямой

С помощью одного лишь циркуля постройте несколько точек, лежащих на одной прямой с двумя данными точками.

19.106. Одним циркулем

Разделите данный отрезок пополам, используя один лишь циркуль.

19.107. Заданные расстояния

С помощью одного циркуля по данным двум точкам, расстояние между которыми равно 1, постройте точки, на которых реализуются расстояния $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$.

19.108. Найти центр

Дана окружность, но не отмечен ее центр. Как найти этот центр с помощью одного лишь циркуля?

19.109. Через недоступную вершину

Две данные прямые, пересекаясь, образуют угол, вершина которого находится за пределами листа бумаги. С помощью одной линейки через эту вершину и данную точку проведите прямую.

19.110. Короткой линейкой

Вы хотите провести прямую через две данные точки, однако ваша линейка слишком коротка и не достает до двух этих точек одновременно. Нельзя ли обойтись только имеющейся линейкой и все же провести указанную прямую?

19.111. Через кляксу

На бумаге нарисован отрезок прямой, которую вы хотите продолжить в определенную сторону с помощью линейки. Однако на вашем пути имеется клякса, не позво-

Рис. 145

ляющая непосредственно провести прямую, не испачкав при этом линейку (рис. 145). Предложите способ, как, пользуясь одной линейкой, можно «обогнуть» кляксу и все же построить нужный участок прямой.

Решения

19.1. Лучше отсчитать 25 конвертов, тогда в пачке их останется 75.

19.2. Можно отмерить небольшую стопку листов, скажем высотой 1 см, и сосчитать количество листов в ней, а затем измерить высоту данной стопки и найти число листов в ней из соответствующей пропорции.

19.3. Перед просмотром анкет на листе бумаги заводят по одной колонке для регистрации каждого отдельного вида данных, подлежащих сбору. Затем при считывании этих данных с анкет в соответствующие колонки вносятся специальные значки (*палочки, точки и т. п.*), а по окончании этой работы производится подсчет количества значков в каждой колонке. Один из наиболее удобных способов регистрации состоит в группировании вносимых значков по 10 штук в виде фигуры, изображенной на рис. 146.

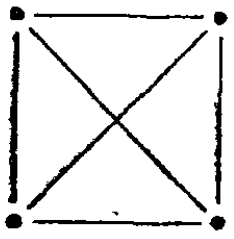


Рис. 146

19.4. Достаточно сосчитать количество гвоздей, скажем, в 100 г или в 1 кг, а затем взвесить ящик с гвоздями (разумеется, вес пустого ящика нужно вычесть) и произвести соответствующие выкладки.

19.5. Вы были в командировке 31—23=8 дней.

19.6. Из первого пакета во второй нужно переложить 5 конфет, тогда в первом пакете станет на 5 конфет меньше, чем было, а во втором — на 5 конфет больше, чем было.

19.7. Выгоднее пилить более короткие бревна, поскольку отношение числа распилов к числу получаемых кусков для короткого бревна меньше, чем для длинного. Так, для получения 12 кусков из трехметровых бревен нужно сделать 8 распилов, а из четырехметровых — 9 распилов.

19.8. Для подъема на 16-й этаж нужно преодолеть 15 расстояний между этажами, что в 5 раз больше количества таких же расстояний для подъема на 4-й этаж.

19.9. Квартира 165 находится в третьем подъезде на 10-м этаже, так как $165=41\times4+1=2\times16\times4+9\times4+1$.

19.10. Две половины порции бульона с пирожками стоят 46 коп. Они составляют *полную порцию и еще пирожок*, значит, пирожок стоит 46—31=15 коп.

19.11. Можно выпить 8 бутылок лимонада, при этом останется 20 коп.

19.12. Достаточно расклепать 2 звена, составляющих один обрывок, и с их помощью соединить друг с другом оставшиеся три обрывка.

19.13. Каждый из инженеров может врезать в сейф свой личный замок, ключ от которого есть только у него. Тогда без него открыть сейф будет невозможно.

19.14. На рис. 147 изображен возможный способ использования трех замков с соблюдением условия задачи.

19.15. Попробовав не более 9 ключей, вы установите, который из 10 ключей подходит к первой двери. Затем, попробовав не более 8 ключей, вы подберете ключ ко второй двери и т. д. Всего вам понадобится не более $9+8+\ldots+$ $+1=45$ попыток.

19.16. Достаточно взять 3 носка, так как 2 из них обязательно будут одинакового цвета.

19.17. Для того чтобы наверняка обеспечить пару одноцветных перчаток, нужно взять минимум 11 перчаток: 6 из них обязательно будут одинакового цвета, а среди них, в свою очередь, 2 обязательно придутся на разные руки.

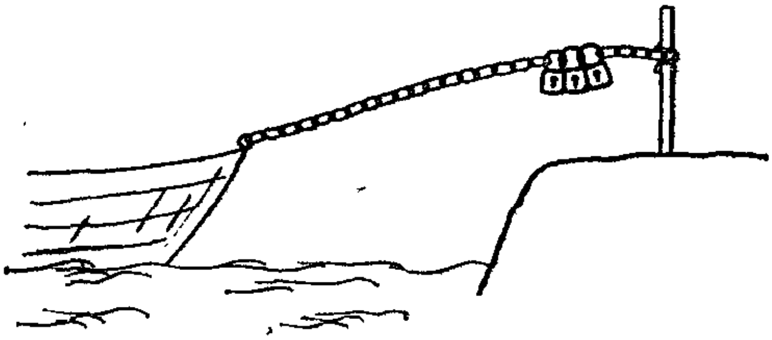


Рис. 147

19.18. Можно надеть сразу обе пары перчаток и работать с первым реактивом, затем снять одну пару перчаток и работать со вторым реактивом, наконец, снова надеть снятую пару, вывернув ее наизнанку, и работать с последним реактивом. (В решении, конечно, содержится элемент шутки, так как вряд ли можно снимать, надевать и вывертывать «грязные» перчатки, не испачкав их «чистую» сторону.)

19.19. Достаточно отложить на веревке 3 одинаковых расстояния, потом еще 4 и еще 5 таких расстояний, получив в итоге на веревке 4 отметины. Если теперь соединить начальную и конечную отметины, а оставшиеся 2 отметины оттянуть так, чтобы образовался треугольник, то этот треугольник обязательно будет прямоугольным.

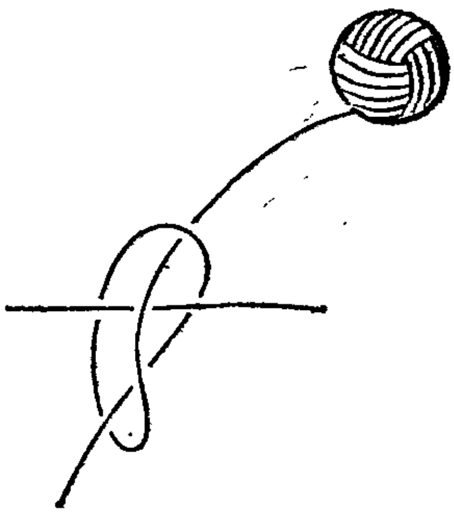


Рис. 148

19.20. Один из возможных способов завязывания узла показан на рис. 148.

19.21. Один из возможных способов прострочить первую эмблему показан на рис. 149. Что же касается второй эмблемы, то ее прострочить с соблюдением условий задачи невозможно.

19.22. Каркас куба содержит 12 ребер, но, чтобы обойти весь этот каркас не прерывая движения, необходимо дополнительно пройти как минимум по трем ребрам. Поэтому для изготовления каркаса указанного куба меньше 1,5 м проволоки будет недостаточно.

19.23. Достаточно разрезать 3 яблока пополам и 2 яблока на 3 части каждое. Получится 6 половинок и 6 третей, которые можно поровну распределить на 6 человек.

19.24. Двумя прямыми разрезами квадратный или круглый торт делим на четыре равные части, а третьим разрезом отсекаем от каких-то двух противоположных частей по

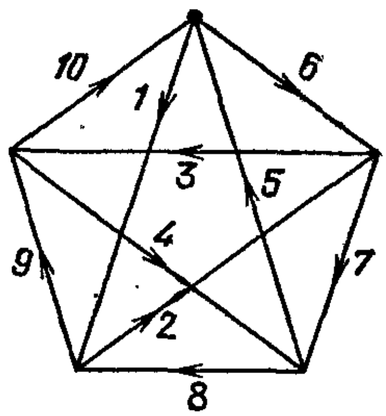


Рис. 149

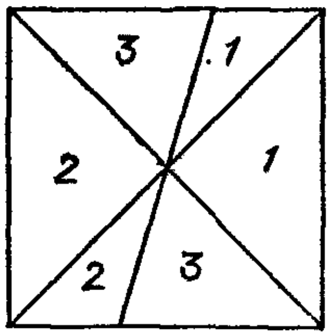


Рис. 150

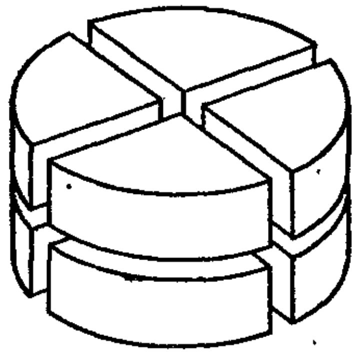


Рис. 151

одной трети (на рис. 150 цифрами 1, 2, 3 соответственно обозначены части, предназначенные разным людям, если их трое).

19.25. Любой торт, однородный по составу, можно разделить на восемь равных частей, если двумя вертикальными разрезами разделить его на 4 равные части, а затем горизонтальным разрезом разделить каждую часть пополам (рис. 151).

19.26. Достаточно перегнуть кусок материи пополам, затем одну из половинок перегнуть еще раз пополам и, наконец, ту четвертинку, которая ближе к середине, снова перегнуть пополам. Последняя линия сгиба разделит длину куска в отношении 3 : 5.

19.27. После стирки от 1 м (длины) материи останется $\frac{15}{16} \times \frac{17}{18} \times 0{,}9 = \frac{51}{64}$ м, поэтому нужно купить 64 м материи.

19.28. Оставшийся после стирки кусок составляет $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36} > \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$ первоначального объема. Поэтому его хватит еще на 2 стирки.

19.29. Оба языка знают 50% жителей, поскольку из 80% знающих английских язык 30% не знают французского языка (предполагается, что каждый житель знает хотя бы один из двух названных языков).

19.30. Новые цены составляют $\frac{4}{5}$ старых; следовательно, товаров на отведенную сумму можно купить в $\frac{5}{4}$ раза, т. е. *на* 25%, *больше.*

19.31. Так как для искомой суммы x рублей справедливо неравенство $x+0{,}02x \leqslant 100$, то $x \leqslant \frac{100}{1{,}02} \approx 98{,}039$, а значит, имея 100 рублей, можно перевести максимум 98 рублей 3 копейки.

19.32. Выгоднее купить большой арбуз, так как его объем в $\left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$ раза (т. е. почти в два, а не в полтора) больше, чем объем другого арбуза.

19.33. Выгоднее покупать крупные мандарины, поскольку при увеличении радиуса мандарина площадь его поверхности (пропорциональная квадрату радиуса) увеличивается не так значительно, как его объем (пропорциональный кубу радиуса).

19.34. Площадь поверхности у одного килограмма крупной картошки меньше, чем у того же количества мелкой. Поэтому крупную картошку чистить выгоднее: и быстрее и экономнее (меньше отходов).

19.35. Было отпито $\frac{7}{8}$ исходного количества сока, так как из соображений подобия объем оставшейся части сока составляет $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ прежнего.

19.36. Широкая кружка более вместительна, так как площадь ее основания в $1{,}5^2 = 2{,}25$ раза больше площади основания другой кружки, а объем соответственно больше в $\frac{2{,}25}{2} = 1{,}125$ раза.

19.37. Будем наклонять кружку в точности до тех пор, пока не появится краешек дна (рис. 152). Тогда в кружке останется ровно полкружки молока.

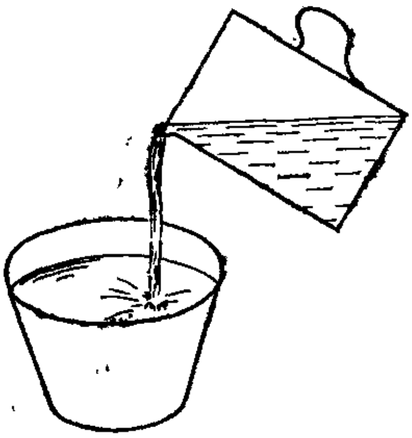


Рис. 152

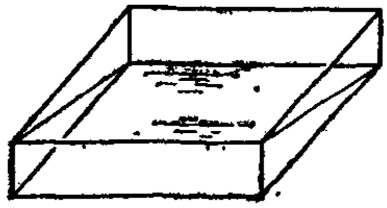


Рис. 153

19.38. Во-первых, из полной кюветы можно отлить ровно половину (рис. 153). Во-вторых, можно отлить из кюветы столько воды, чтобы осталась ровно шестая часть кюветы (рис. 154). В-третьих, при наличии какого-либо сосуда для временного хранения воды можно комбинировать также и другие порции воды, кратные шестой части кюветы: $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$.

19.39. Измеряем диаметр d основания (внутренний, с учетом толщины стекла) и высоту h_1 столба жидкости, а

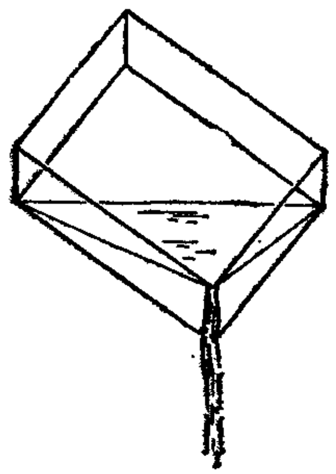


Рис. 154

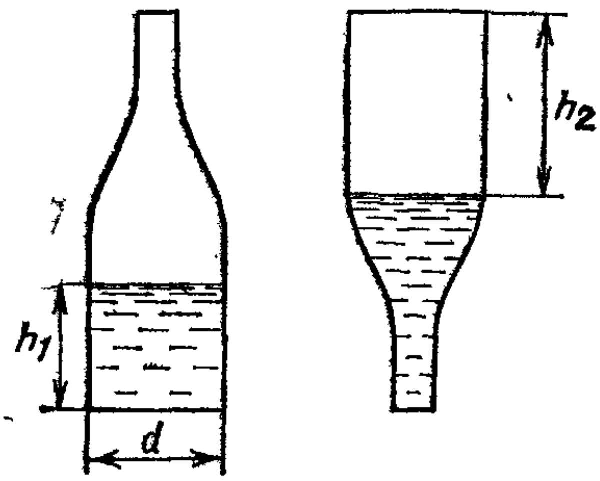


Рис. 155

затем перевертываем бутылку горлышком вниз и измеряем высоту h_2 столба воздуха в бутылке рис. 155. Теперь остается произвести подсчет

$$V=\frac{\pi d^2}{4}(h_1+h_2).$$

19.40. Опустим предмет, например, в банку и нальем в нее воды так, чтобы предмет был полностью покрыт водой. Затем, вынув предмет из банки, измерим, на сколько понизится при этом уровень воды. Объем предмета будет равен произведению полученной величины на площадь сечения банки.

19.41. Достаточно поделить объем израсходованной краски на площадь окрашенной поверхности.

19.42. Это можно сделать за четыре операции, результаты которых указаны в следующей таблице (сами операции без труда угадываются по данным таблицы):

Номер операции	Кастрюля	Банка
—	0	0
1	4	0
2	0	4
3	4	4
4	3	5

19.43. Для выполнения поставленной задачи необходимо сделать минимум 9 переливаний, результаты которых оформлены в виде следующей таблицы:

Номер переливания	Ведро	Банка	Бидон
—	10	0	0
1	3	0	7
2	3	3	4
3	6	0	4
4	6	3	1
5	9	0	1
6	9	1	0
7	2	1	7
8	2	3	5
9	5	0	5

19.44. Достаточно четырех взвешиваний. Сначала взвешиваем 1 кг песку, затем еще 2 кг (положив на одну чашку весов уже взвешенный песок и гирю), затем еще 3 кг (сложив на одной чашке $1+2=3$ кг взвешенного песка) и, наконец, еще 7 кг (сложив на одной чашке весь песок и гирю). Меньшим числом взвешиваниями обойтись нельзя, так как за три взвешивания можно набрать максимум $1+2+4=$ $=7$ кг песку.

19.45. Если гири можно класть только на одну чашку весов, то необходимо иметь, как минимум, четыре гири. Годится, например, набор гирь в 1, 2, 4, 8 кг. Если же разрешить класть гири на обе чашки, то необходимо иметь три гири. Так, из трех гирь в 1, 3, 9 кг можно скомбинировать любой вес от 1 до 13 кг.

19.46. Для того чтобы взвесить мелкий предмет на грубых весах, нужно увеличить вес этого предмета в достаточное число раз. В нашем случае можно взвесить, скажем, 100 монет по 1 копейке, а затем полученный вес поделить на 100. Полезно знать, однако, что вес копейки равен 1 г.

19.47. а) Три предмета можно упорядочить тремя сравнениями: каждый предмет сравнить с каждым. б) Для четырех предметов достаточно пяти сравнений: тремя сравнениями упорядочиваются некоторые три предмета, а затем со средним из них сравнивается четвертый предмет, который в зависимости от результата сравнивается, наконец, с одним из двух оставшихся предметов тройки. в) Пять предметов можно упорядочить семью сравнениями: сначала упорядочим предметы в некоторых двух парах и сравним два более тяжелых предмета по одному из каждой пары, в образовавщуюся при этом тройку вставим пятый предмет, а затем и более легкий предмет оставшейся пары. На все это уйдет не более семи сравнений. Шести сравнений будет, вообще говоря, недостаточно.

19.48. Например, годится следующая формула:

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|).$$

19.49. Достаточно сделать 5 поездок, так как за каждую поездку, кроме последней, можно увезти не менее 2 т. Меньше 5 поездок может не хватить, например, если весь груз расфасовать поровну в 13 ящиков.

19.50. Когда весы находятся в равновесии, отношение весов грузов, лежащих на чашках, есть фиксированная (обратная отношению плеч) величина a. Поэтому если отвесить по 1 кг сахара на каждой чашке весов, то на самом деле будет получено $a + \frac{1}{a}$ кг, что при $a \neq 1$ будет больше 2 кг. Чтобы отвесить ровно 2 кг сахара, достаточно весы с килограммовой гирей на одной чашке уравновесить любым грузом (например, тем же песком), а затем снять гирю и уравновесить весы сахаром. Мы получим ровно 1 кг сахара и аналогично еще 1 кг.

19.51. Если прикрепить гирю к одному концу линейки, а взвешиваемый груз к другому (рис. 156) и уравновесить

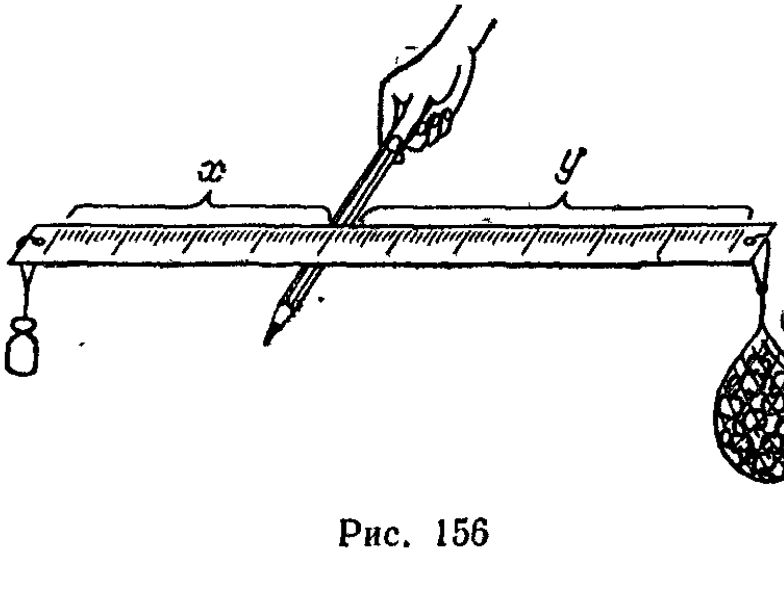


Рис. 156

эту систему, правильно подобрав на линейке точку опоры, то отношение $x : y$ расстояний по линейке от опоры до гири и до груза будет равно отношению весов груза и гири соответственно. Кстати, можно проградуировать линейку, написав возле нескольких возможных положений опоры заранее подсчитанные соответствующие веса груза.

19.52. Запомнив время на стенных часах, сходите и узнайте правильное время. Вернувшись домой, определите по стенным часам время вашего отсутствия и прибавьте половину этого времени к тому времени, которое вы видели на правильных часах. Это время и нужно установить на ваших часах.

19.53. Время t работы будет наименьшим, если обе машинистки закончат печатать одновременно, т. е. если первая машинистка напечатает $\frac{t}{6}$ листов, а вторая $\frac{t}{10}$ листов. Поэтому работу между ними нужно заранее распределить в пропорции $\frac{t}{6}:\frac{t}{10}=5:3$.

19.54. Если шины на передних колесах стираются за n км пути, а задние — за m км, то перестановка местами передних колес с задними после прохождения $\frac{nm}{n+m}$ км пути приводит к одновременному стиранию всех колес и максимально удлиняет пробег автомобиля без замены шин.

19.55. В результате внедрения всех трех изобретений производственные затраты могут составить минимум $\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{9}{10}=\frac{27}{100}$ прежних затрат. Поэтому они уменьшатся в лучшем случае на 73% (это если сами изобретения оказывают влияние на процесс производства не зависимым друг от друга образом).

19.56. Постоянно на лугу могут пастись максимум 15 коров. Если обозначить через x полное количество травы на лугу, а через y и z количества травы, вырастающей ежедневно на лугу и съедаемой одной коровой за один день соответственно, то будет справедлива система

$$\begin{cases} x+4y=30\times 4z, \\ x+6y=25\times 6z, \end{cases}$$

откуда $15z=y$. Таким образом, трава на лугу растет с той же скоростью, с какой ее поедают 15 коров. Проверка показывает, что 16 коров съедят всю траву за 60 дней.

19.57. Парашютист мог обойти стену, все время держась за нее, скажем, левой рукой и замеряя углы поворотов, которые ему приходилось при этом делать. Подсчитав в конце алгебраическую сумму всех этих углов (со знаком плюс, если поворот был левым, и со знаком минус, если правым), он мог воспользоваться следующим фактом: сумма углов должна равняться либо —360°, если он находится внутри участка, либо 360°, если снаружи.

19.58. Если поворачивать табуретку в «плоскости» пола, то обязательно наступит такой момент, когда все 4 ножки табуретки будут касаться пола.

19.59. На рис. 157 показано, как, положив кирпич на угол стола, а затем передвинув его параллельно краю стола на длину соответствующего ребра кирпича, можно получить две точки (угол стола и вершина кирпича), расстояние между которыми как раз равно длине главной диагонали кирпича.

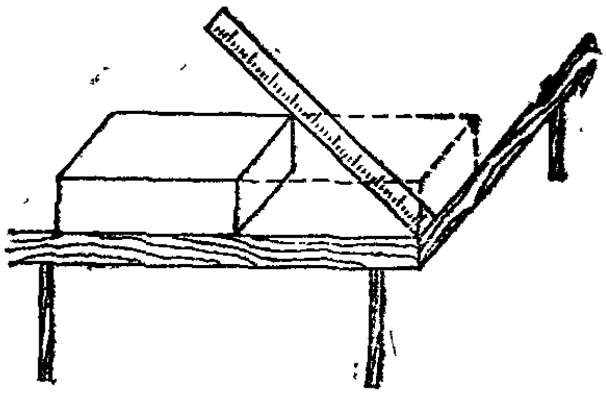


Рис. 157

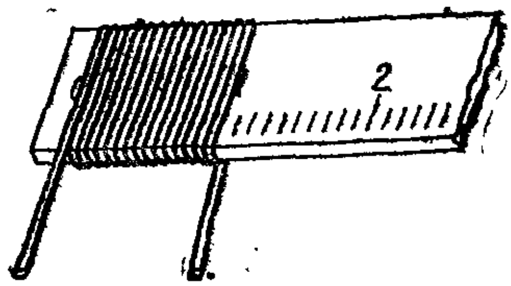


Рис. 158

19.60. Намотаем проволоку в один слой, например, на саму линейку так, чтобы соседние витки проволоки были плотно прижаты друг к другу (рис. 158). Тогда, поделив ширину полученного слоя на количество витков, мы получим толщину одного витка, которая совпадает с диаметром проволоки.

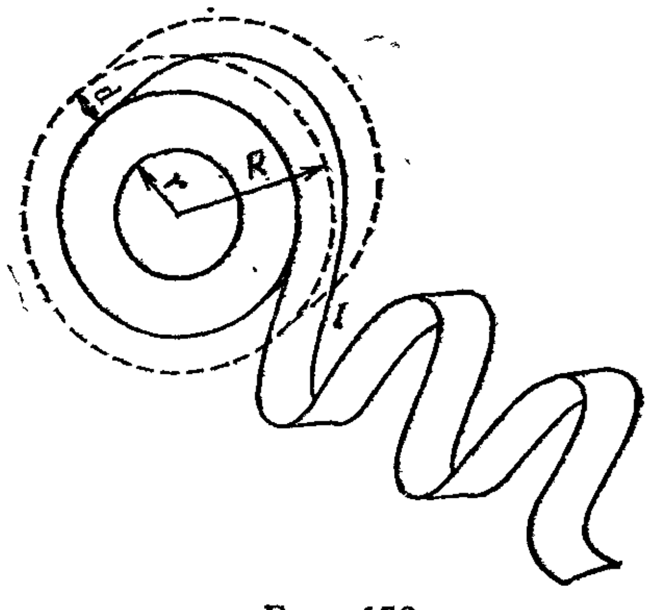


Рис. 159

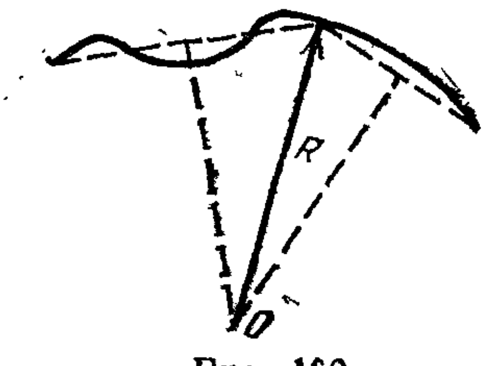


Рис. 160

19.61. Измерим внешний радиус R и внутренний радиус r рулона (рис. 159). Затем отмотаем такую часть ленты длиною l, чтобы при этом ощутимо уменьшился внешний радиус рулона. Если он уменьшился на d, то длина ленты приблизительно равна

$$\frac{l(R^2-r^2)}{R^2-(R-d)^2}=\frac{l(R^2-r^2)}{d(2R-d)},$$

так как длина ленты в рулоне пропорциональна площади его поперечного сечения.

19.62. Если на осколке сохранились хотя бы три точки края пластинки, то можно перенести их на бумагу и построить центр O окружности, проходящей через эти три точки (рис. 160). Радиус R этой окружности совпадает с радиусом пластинки. Впрочем, его можно и посчитать, измерив, скажем, попарные расстояния a, b и c между тремя указанными точками и воспользовавшись формулами

$$R=\frac{abc}{4S}, \quad S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p=\frac{a+b+c}{2}.$$

19.63. Измерим длину l большой окружности шара, образовав из измерительной ленты наименьшее кольцо, через которое проходит шар. Тогда объем шара будет равен $l^3/(6\pi^2)$.

19.64. Если обозначить через H высоту маяка, а через R радиус Земли ($R\approx 6400$ км), то искомое расстояние будет равно (рис. 161)

$$S=\sqrt{(R+H)^2-R^2}=\sqrt{H(2R+H)}>\sqrt{2RH}.$$

При $H=125$ м имеем $S\approx 40$ км.

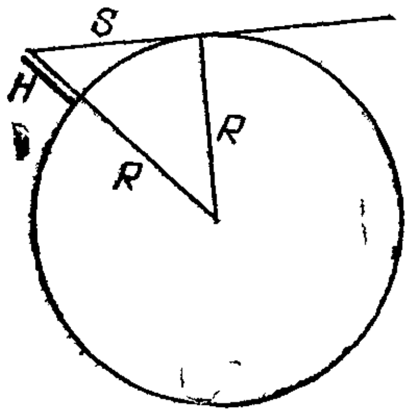


Рис. 161

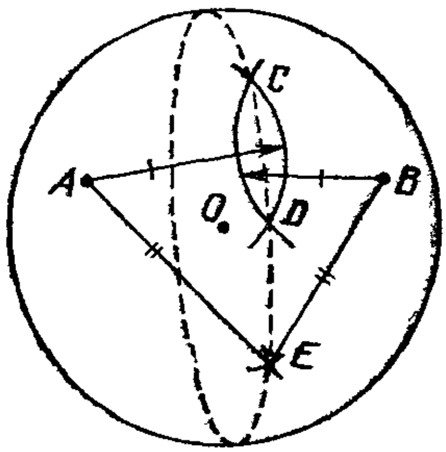


Рис. 162

19.65. Возьмем две точки A и B на поверхности бильярдного шара и проведем на нем дуги равных радиусов с центрами в этих точках. В пересечении дуг получатся точки C и D, аналогично построим точку E (рис. 162). Теперь, замерив циркулем длины отрезков CD, DE и CE, мы перенесем эти точки на бумагу с сохранением указанных длин и построим на бумаге центр O окружности, описанной вокруг получившегося треугольника. Радиус шара как раз и будет равен радиусу этой окружности.

19.66. Из всех прямоугольников фиксированного периметра наибольшую площадь имеет квадрат, так как величина площади прямоугольника размером $a\times(p-a)$ достигает наибольшего значения $\left(\frac{a+(p-a)}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}$ при $a=p-a$.

19.67. Наибольшую площадь будет иметь палисадник, представляющий собой половину квадратного участка, т. е. имеющий две короткие стороны, равные половине длинной стороны, противолежащей стене дома.

19.68. Наибольший объем будет иметь коробка, высота h которой равна четверти стороны основания, поскольку учетверенный объем $4h(a-2h)^2$ коробки, сделанной из квадрата со стороной a, достигает наибольшего значения

$$\left(\frac{4h+(a-2h)+(a-2h)}{3}\right)^3=\frac{8a^3}{27}$$

при $4h=a-2h$.

19.69. Если x, y и z — соответственно высота, ширина и длина коробка объемом V, то расход материала на его изготовление пропорционален величине $2xy+3yz+4xz$, которая принимает наименьшее значение

$$3\sqrt[3]{2xy\times 3yz\times 4xz}=6\sqrt[3]{3V^2}$$

при $2xy=3yz=4xz$, т. е. когда $x:y:z=3:4:2$.

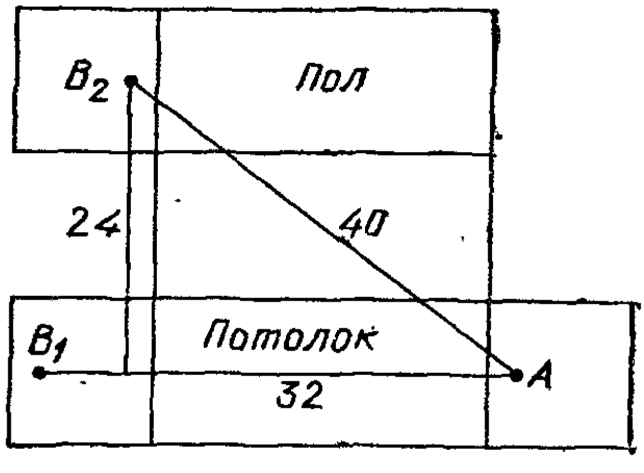


Рис. 163

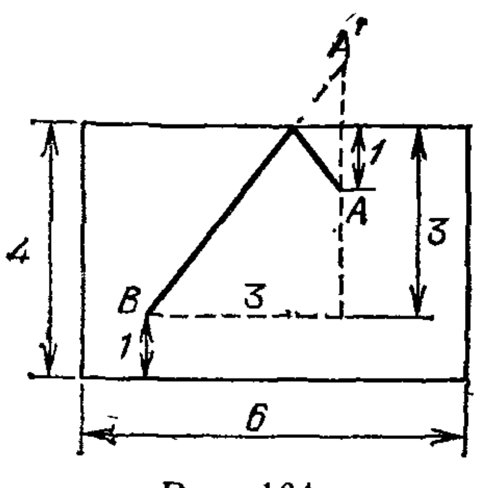


Рис. 164

19.70. Кратчайший путь от лампочки A до выключателя B будет равен 40 м и пройдет он не только по потолку и торцевым стенкам (такой путь AB_1 на развертке, изображенной на рис. 163, имеет длину 42 м), а также и по боковой стене (соответствующий путь на рис. 163 проходит по отрезку AB_2).

19.71. Кратчайший путь от лампочки A до выключателя B имеет длину 5 м и показан на развертке бункера (рис. 164).

19.72. Если разместить развертку пяти граней куба так, как изображено на рис. 165, то в четырех углах квадратной салфетки останутся четыре треугольника, которых будет достаточно для покрытия шестой грани куба (подсчет показывает, что нарисованный «крест» действительно помещается в квадрате и даже оставляет зазор шириной $\frac{3}{2}-\sqrt{2}$).

19.73. Одна из вершин прямоугольника должна совпадать с серединой гипотенузы.

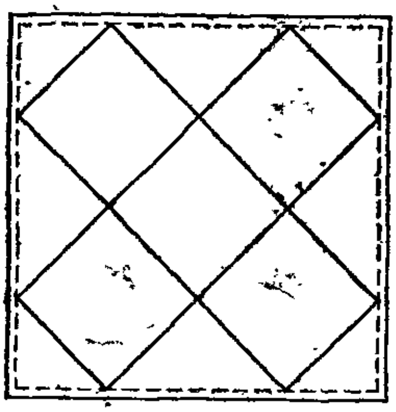


Рис. 165

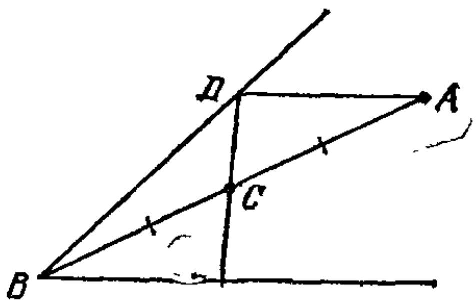


Рис. 166

19.74. Через точку A, расположенную от вершины B угла вдвое дальше, чем данная точка C (рис. 166), проведем прямую, параллельную стороне угла. Она пересечет другую сторону угла в точке D, через которую и проходит искомая прямая.

19.75. Диаметром наименьшего круга, содержащего указанный треугольник, является наибольшая сторона этого тупоугольного треугольника, равная 4.

19.76. Крепче держится треугольный гвоздь, поскольку он соприкасается с окружающей его древесиной по наибольшей поверхности: при равных площадях сечения периметр сечения будет наибольшим у треугольника и наименьшим у круга (отсюда, кстати, следует, что круглый гвоздь держится слабее любых других гвоздей).

19.77. Частей не могло быть 66, но могло быть 67, так как при каждом измельчении листа число кусочков увеличивалось на 3, а вначале это число было равно 1.

19.78. На рис. 167 показано, как разрезать квадрат на 4, 6 или 8 квадратов. Деля любую из полученных частей на 4 квадрата, мы будем увеличивать их число на 3. Таким образом, из исходного квадрата можно получить разрезанием как 4 квадрата, так и любое их число, большее 5.

19.79. Число разломов не зависит от порядка, в котором они производятся. Это число будет на единицу меньше, чем количество квадратных долек, составляющих плитку шоколада, поскольку после первого разлома образуются два куска шоколада, после второго — три, после третьего — четыре и т. д.

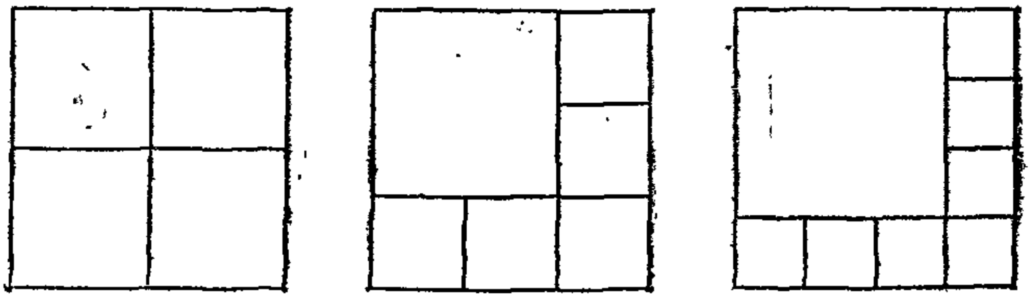


Рис. 167

19.80. Достаточно двух цветов. Это доказывается индукцией по числу прямых линий, делящих страну на области.

19.81. Сложив лист пополам, разрежем его так, как показано на рис. 168.

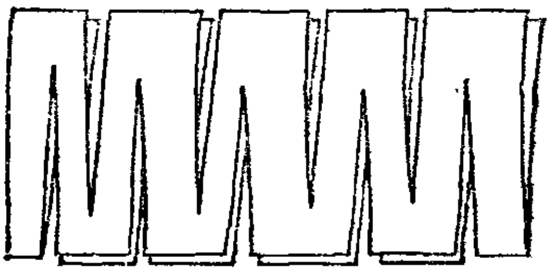


Рис. 168

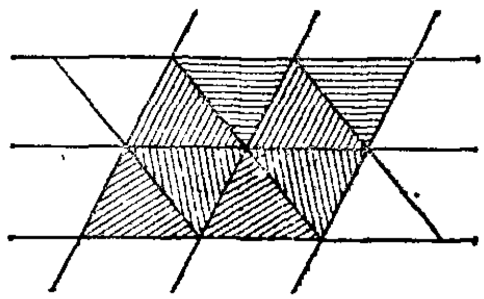


Рис. 169

19.82. Разобьем имеющиеся треугольники на пары и сложим из них одинаковые параллелограммы, а затем замостим всю плоскость такими параллелограммами (рис. 169).

19.83. Для паркета годятся любые одинаковые четырехугольники: сначала замостим всю плоскость параллелограммами, построенными на диагоналях данного четырехугольника как на сторонах, а затем в каждый параллелограмм поместим по данному четырехугольнику (на рис. 170 они заштрихованы), а остальные части плоскости автоматически окажутся такими же, но повернутыми четырехугольниками.

19.84. Годится любая прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей прямоугольника.

19.85. Достаточно провести разрез через центры симметрии прямоугольника и параллелограмма.

19.86. Достаточно, например, разрезать треугольник на три части, на которые его разбивают перпендикуляры к сторонам, опущенные из центра вписанной окружности (рис. 171).

19.87. Пусть требуется провести разрез через вершину A четырехугольника $ABCD$. Через середину O диагонали BD проведем прямую, параллельную другой диагонали AC, до пересечения со стороной BC или CD в точке E (рис. 172). Тогда прямая AE делит четырехугольник $ABCD$ на равновеликие части.

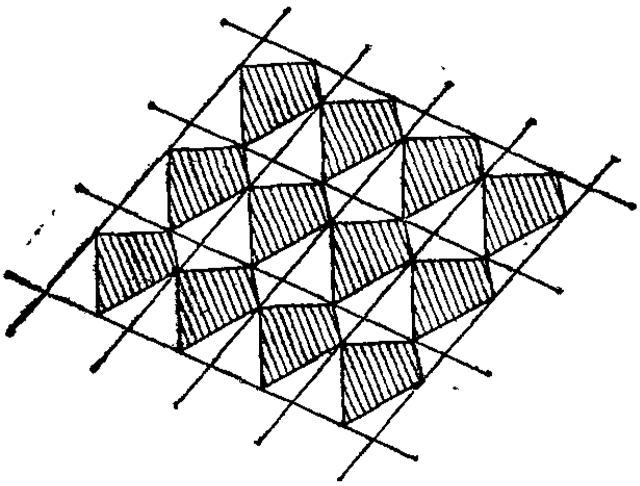


Рис. 170

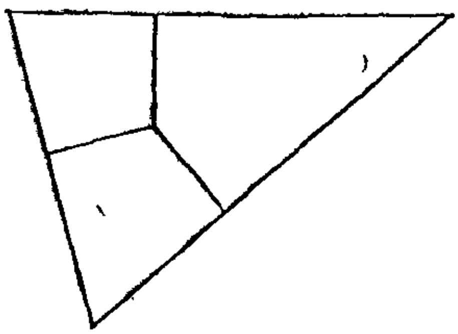


Рис. 171

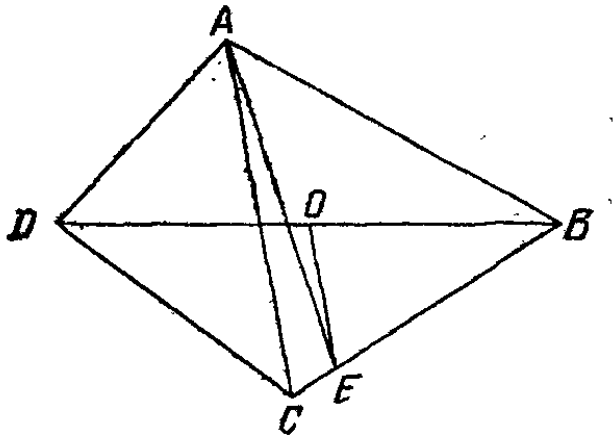


Рис. 172

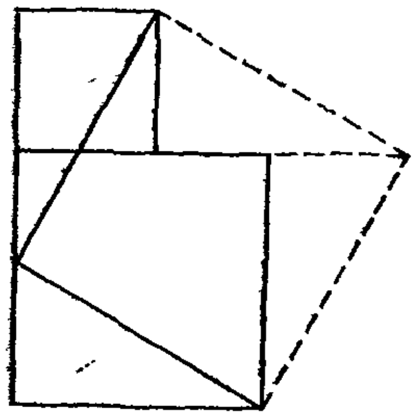


Рис. 173

19.88. Приставим один из меньших квадратов к другому и отрежем от них два исходных прямоугольных треугольника, переложив их так, как показано на рис. 173.

19.89. Если мысленно разрезать данный ящик на два ящика размером $20\times15\times9$ и $20\times15\times5$, то в каждом из них одно измерение будет делиться на 10, другое на 5 и еще одно на 3. Поэтому оба ящика, а значит, и исходный можно заполнить коробками.

19.90. Можно разместить 68 кругов так, как изображено на рис. 174. При этом останется неиспользованной полоска шириной

$$8-\left(\frac{1}{2}+8\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=7-4\sqrt{3}$$

(последняя величина положительная, поскольку $7^2 = 49 > 48 = (4\sqrt{3})^2$).

19.91. Если бы это было возможно, то в круге радиуса 550 м можно было бы разместить без наложений 125 кружков радиуса 50 м каждый с центрами в скважинах. Но тогда общая площадь этих кружков, равная $125 \times 2500 \times \pi$ м^2

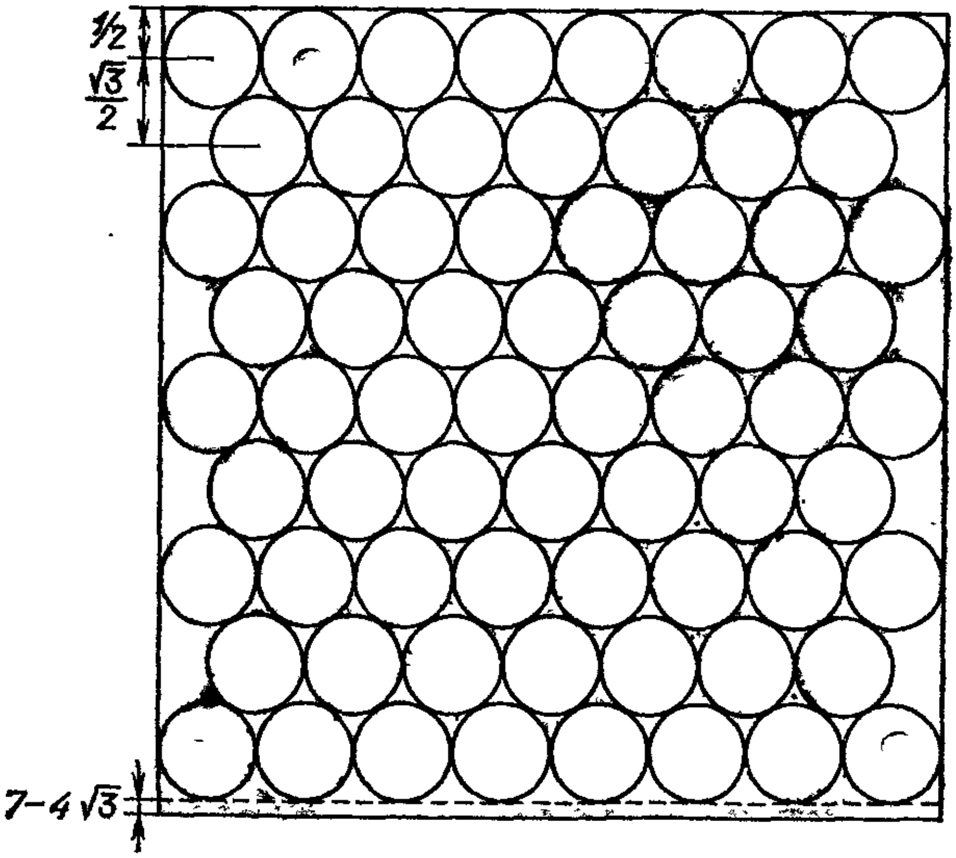


Рис. 174

была бы меньше площади объемлющего круга, равной $550 \times 550\pi$ м^2, что не соответствует истине. Значит, указанное размещение скважин невозможно.

19.92. Если данная точка C не принадлежит окружности, то найдем точки D и E пересечения прямых AC и BC с окружностью, а затем точку F пересечения прямых AE и BD (рис. 175). Тогда прямая CF представляет собой искомый перпендикуляр. Если же точка C лежит на окружности, то проведем какой-либо перпендикуляр к диаметру AB, пересекающий окружность в точках K и L (рис. 176), а затем найдем точки M и N пересечения прямой CL с диаметром AB и прямой KM с окружностью соответственно. Тогда прямая CN будет также перпендикулярна диаметру.

19.93. Проведя на одинаковых расстояниях (равных ширине h линейки) от сторон данного угла параллельные прямые (рис. 177), мы получим ромб, диагональ которого делит угол пополам.

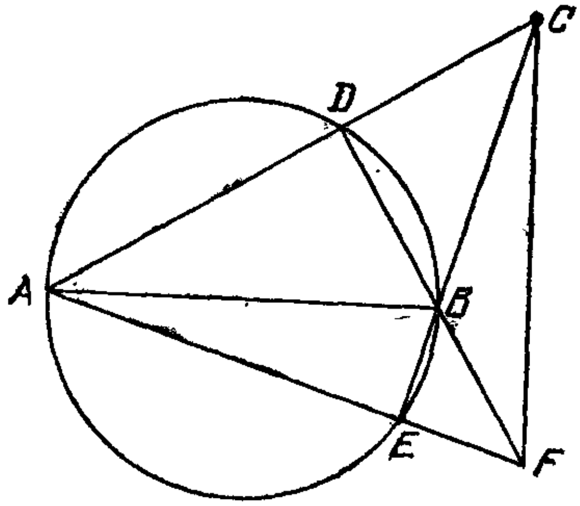


Рис. 175

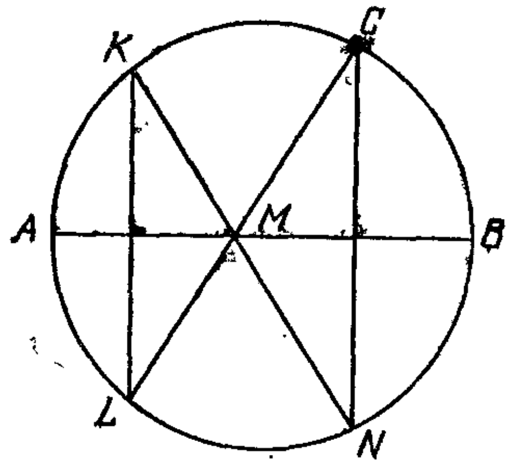


Рис. 176

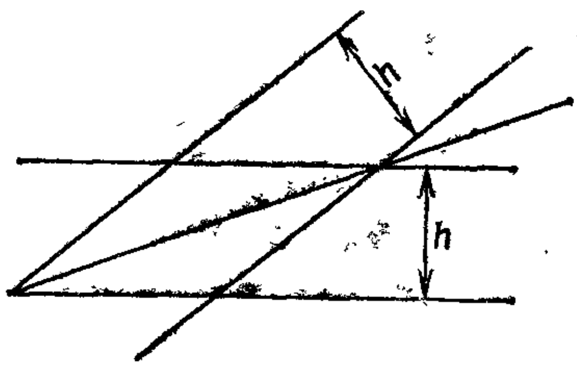


Рис. 177

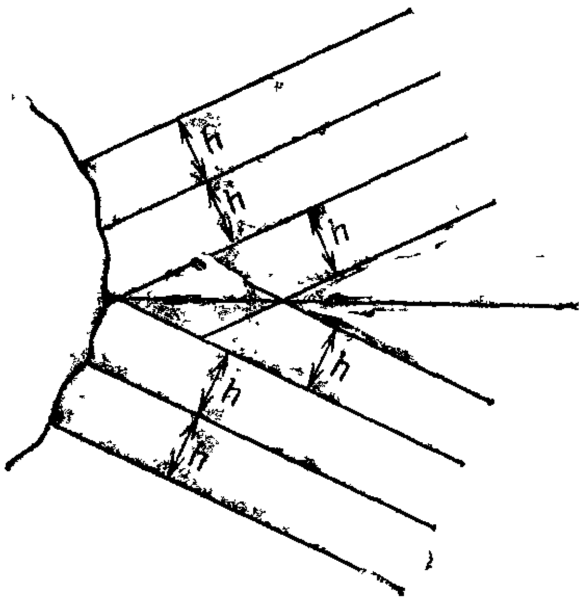


Рис. 178

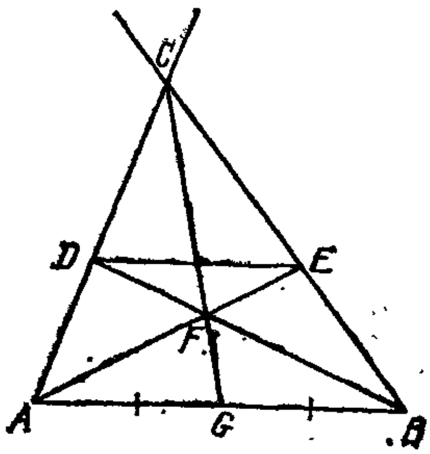


Рис. 179

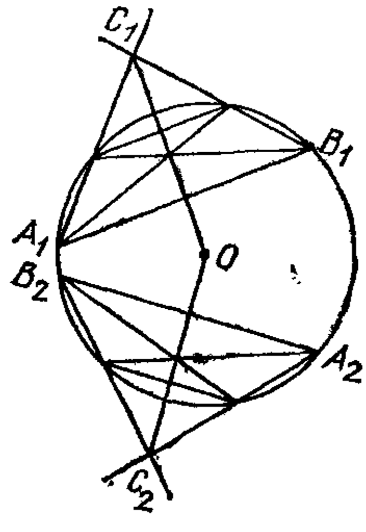


Рис. 180

19.94. Проведем по одинаковому количеству прямых, параллельных обеим сторонам угла, на расстояниях, кратных ширине h линейки. Соответствующие точки пересечения этих прямых лежат на биссектрисе угла (рис. 178).

19.95. Проведем прямую, параллельную данному отрезку AB, и построим треугольник ACB, стороны AC и BC которого пересекают прямую в точках D и E (рис. 179). Тогда, проведя через точку F пересечения прямых AE и BD прямую CG, мы разделим отрезок AB пополам.

19.96. Используя конструкцию, описанную в решении задачи 19.95, построим два равнобедренных треугольника $A_1C_1B_1$ и $A_2C_2B_2$ (рис. 180) и проведем их медианы, на пересечении которых как раз и будет лежать центр окружности.

19.97. Отложив на данной прямой две точки на расстоянии друг от друга, большем ширины h линейки, приложим двустороннюю линейку так, чтобы оба раза отмеченные точки примыкали к разным сторонам линейки (рис. 181). Проведя четыре соответствующие прямые, получим в пересечении ромб с одной диагональю, лежащей на данной прямой, и с другой диагональю, ей перпендикулярной.

19.98. Отложим на сторонах угла от его вершины по два отрезка длиной 1 см каждый (см. задачу 9.7 и рис. 10). Соединив четыре полученные точки попарно крест-накрест, мы получим точку биссектрисы (рис. 182).

19.99. Впишем в данную окружность два прямых угла, которые будут опираться на диаметры (рис. 183). Тогда точка пересечения этих диаметров укажет центр окружности.

19.100. Построим два прямоугольника с общей стороной, совпадающей с данным отрезком. Тогда, соединив друг с другом точки пересечения их диагоналей, мы найдем середину этого отрезка (рис. 184).

19.101. Можно сильно приблизить друг к другу вершины исходного прямоугольника, перенеся каждую из них вдоль длинной стороны к ее середине на ширину шоколадки (рис. 185).

19.102. Проведем какую-либо дугу с центром в данной точке A, чтобы получились две точки B и C пересечения с исходной дугой (рис. 186). Затем найдем точку D, отличную от точки A и равноудаленную от точек B и C. Прямая AD будет искомой.

19.103. Построим точку C на равном расстоянии от точек A и B и отложим на луче BC точку D на том же расстоянии от точки C (рис. 187). Тогда угол BAD будет прямым.

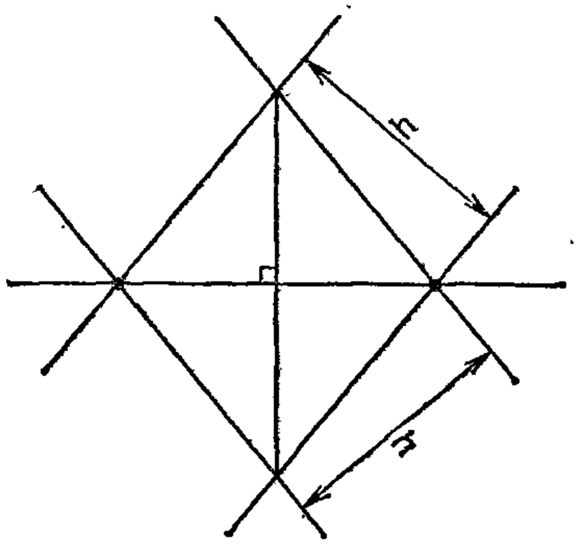


Рис. 181

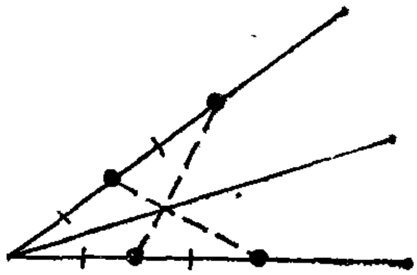


Рис. 182

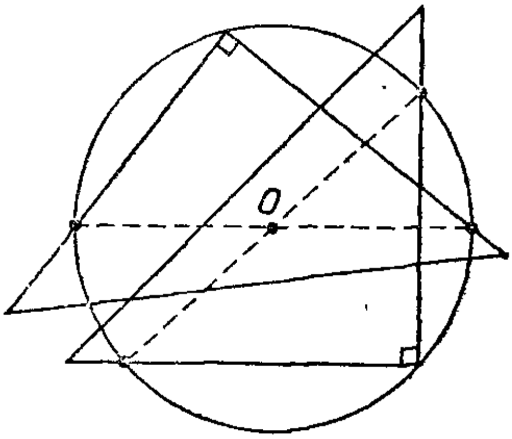


Рис. 183

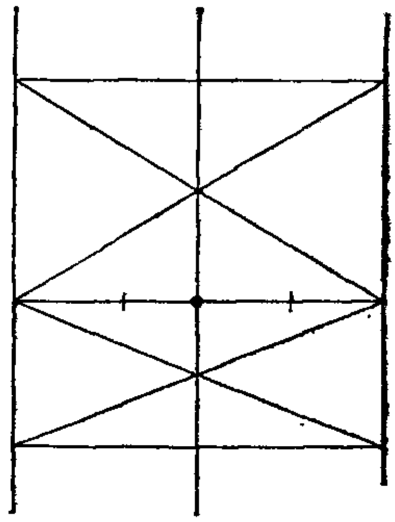


Рис. 184

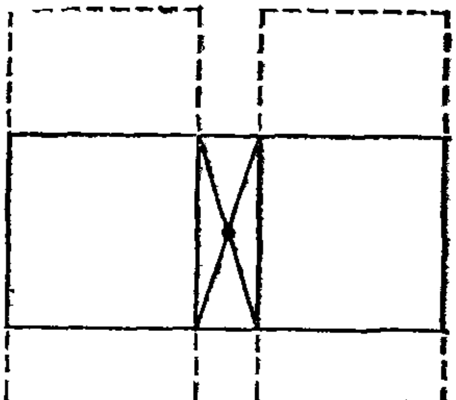


Рис. 185

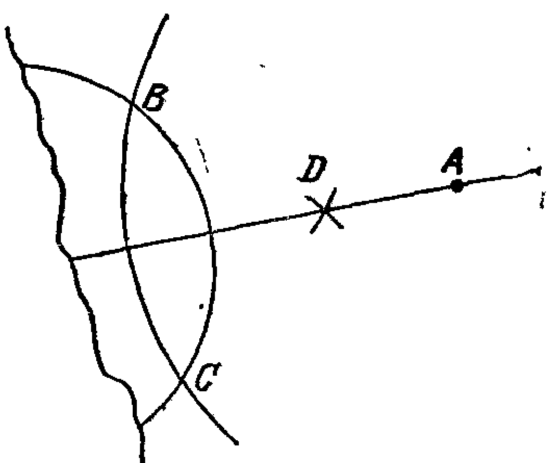


Рис. 186

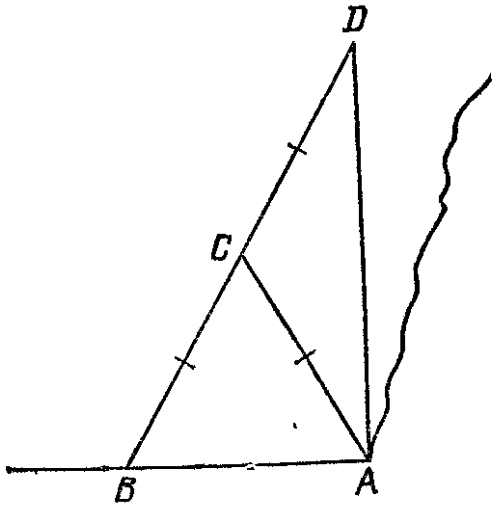


Рис. 187

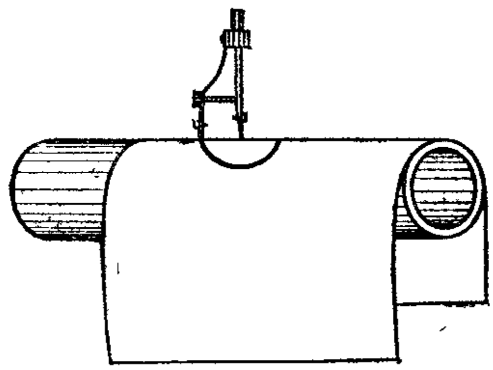


Рис. 188

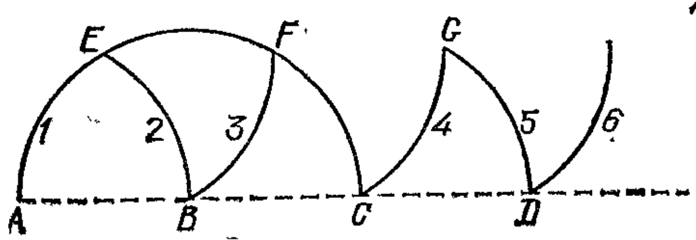


Рис. 189

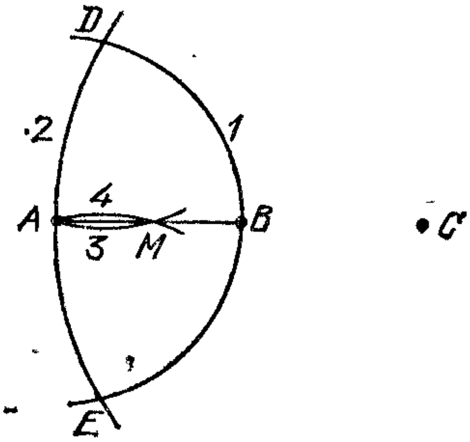


Рис. 190

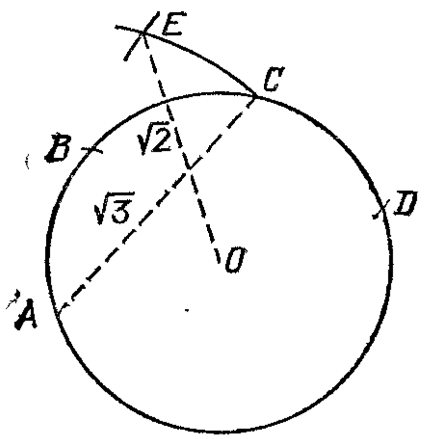


Рис. 191

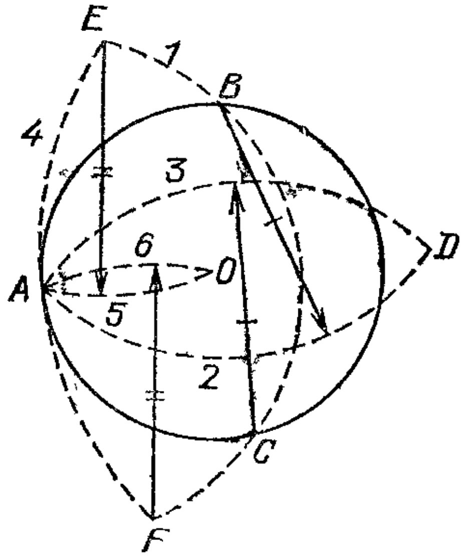


Рис. 192

19.104. Положим бумагу на цилиндрический предмет, например на трубу, и, установив одну ножку циркуля на полученной поверхности, проведем на ней циркулем «окружность» (рис. 188). Распрямив затем лист, получим на нем кривую овальной формы.

19.105. Точки A, B, C, D (первые две точки считаем данными) на рис. 189 лежат на одной прямой, при этом все дуги одинакового радиуса AB проводятся последовательно с центрами в B, A, E, F, C, G.

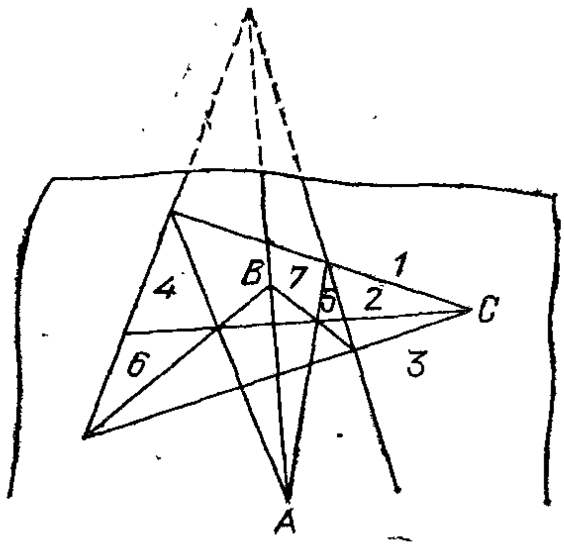


Рис. 193

19.106. По данным концам отрезка AB построим точку C так, как указано в решении задачи 19.105. Затем проведем дугу 2 с центром C и радиусом AC. Наконец, проведем дугу 3 с центром D (рис. 190) и радиусом AD, которая пересечет отрезок AB в его середине M (если даже отрезок AB, как таковой, не проведен, точку M можно построить, проведя дополнительно дугу 4 с центром E).

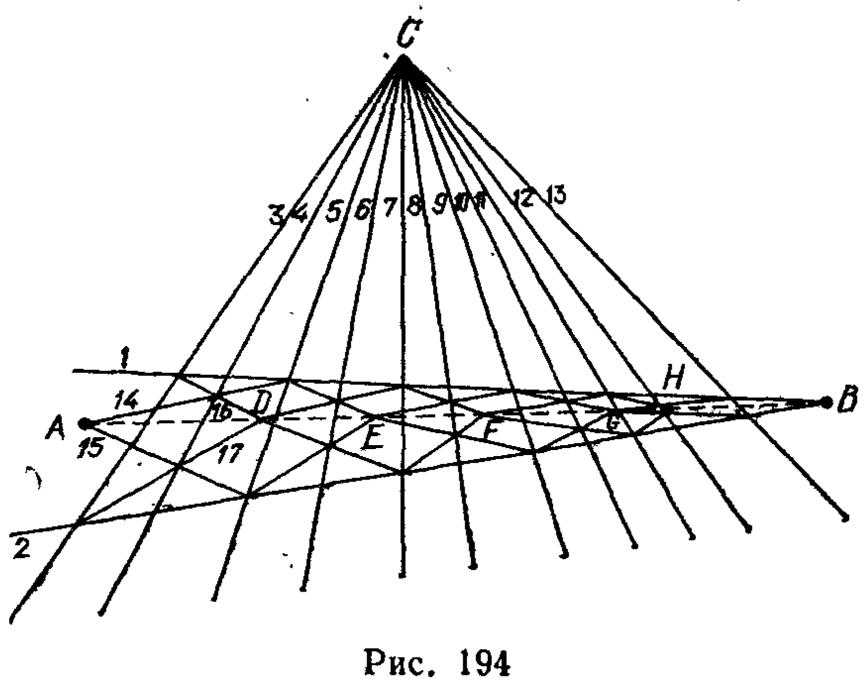


Рис. 194

19.107. Проведем окружность с центром O и радиусом 1 и, не меняя раствора циркуля, отложим на ней точки A, B, C, D (рис. 191). Тогда расстояние между точками A и C равно $\sqrt{3}$, а точка E пересечения двух дуг с центрами A, D и радиусом $\sqrt{3}$ удалена от точки O на расстояние $\sqrt{2}$.

19.108. Для нахождения центра O данной окружности достаточно провести дугу 1 с центром в некоторой точке A этой окружности (рис. 192), затем еще две дуги 2 и 3 того же радиуса с центрами B и C, далее дугу 4 с центром D и радиусом AD и, наконец, две дуги 5 и 6 с центрами E и F и радиусом AE, которые как раз пересекутся в точке O.

19.109. Чтобы по данной точке A построить точку B, лежащую на одной прямой с точкой A и вершиной угла, достаточно выбрать точку C и провести последовательно прямые линии 1—7 так, как указано на рис. 193.

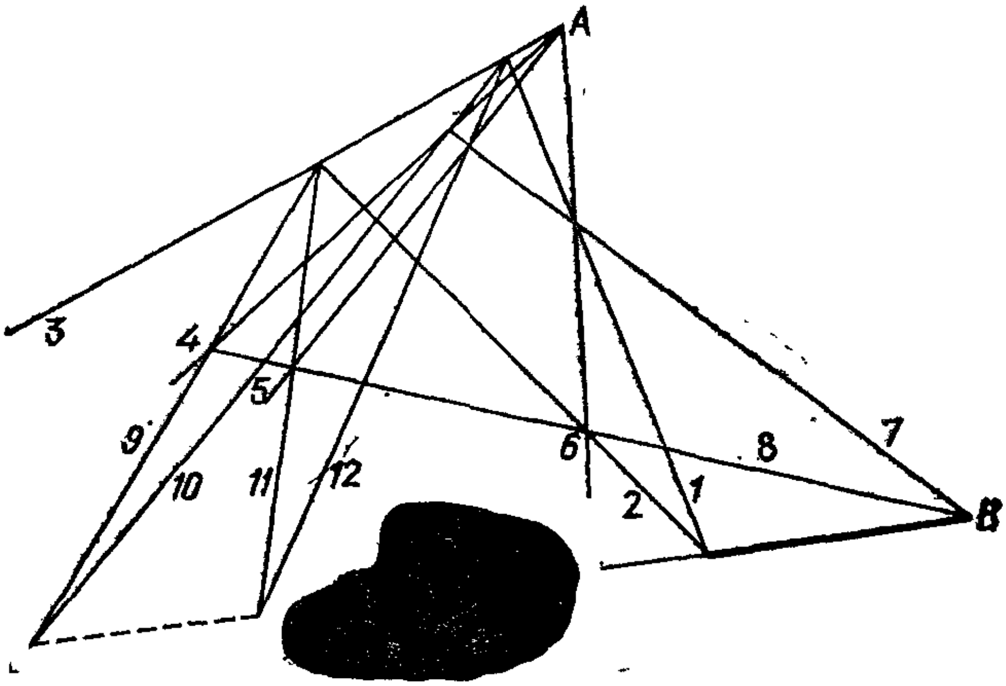


Рис. 195

19.110. Пусть надо соединить прямой линией точки A и B. Заметим, что короткой линейкой мы можем продолжать любую прямую по заданному ее участку. Пользуясь этим замечанием, проведем прямые 1, 2 через точку B так, чтобы они прошли близко от точки A. Затем из некоторой точки C выпустим достаточно густой пучок прямых: на рис. 194 это прямые 3—13. Далее проведем прямые 14—17 и найдем точку D, затем аналогично точки E, F, G, H, которые все будут лежать на прямой AB и позволят построить эту прямую короткой линейкой.

19.111. Через некоторую точку данной прямой проведем две прямые 1, 2, а через некоторую точку A проведем четыре прямые 3—6 так, как показано на рис. 195. Выбрав на данной прямой удобную точку B, проведем последовательно прямые 7—12. Тогда точки пересечения прямых 9, 10 и прямых 11, 12 будут лежать на продолжении данной прямой за кляксу.

СОДЕРЖАНИЕ

Научно-популярное издание

СЕРГЕЕВ Игорь Николаевич
ОЛЕХНИК Слав Николаевич
ГАШКОВ Сергей Борисович

ПРИМЕНИ МАТЕМАТИКУ

Заведующий редакцией *А. П. Баева*
Редактор *М. М. Горячая*
Художник *П. И. Чернуский*
Художественный редактор *Г. М. Коровина*
Технический редактор *И. Ш. Аксельрод*
Корректоры *Н. Д. Дорохова, Н. Б. Румянцева*

ИБ № 32682

Сдано в набор 26.01.89. Подписано к печати 25.07.89. Формат 84×108/32. Бумага офс. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 12,6. Усл. кр.-отт. 13,07. Уч.-изд. л. 12,65. Тираж 200 000 экз. Заказ №9—142. Цена 55 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 113054 Москва, Валовая, 28

Отпечатано на полиграфкомбинате ЦК ЛКСМ Украины «Молодь» ордена Трудового Красного Знамени издательско-полиграфического объединения ЦК ВЛКСМ «Молодая гвардия». 252119 Киев-119, ул. Пархоменко, 38—44.

MAKE USE OF MATHEMATICS

by I. N. Sergeev, S. N. Olehnic, S. B. Gashkov.

A great number of problems are given in the book. They are all of practical character. Methods of fast counting are also considered as well as geometric constructions and measurements carried and with the help of a limited number of tools. The book also deals with methods of finding the most economic means for solving problems in various situations, also problems on mixing of substitunces, cutting up geometric figures, weighing, pouring and so on. All problems are supplied with solutions.

The aim of the book is to teach how to apply mathematical ideas and methods to finding a way out of various complicated situations that may arise.

The book is meant for schoolchildren, teachers and those who are interested in mathematics.

The authors are teachers of mathematics at the Mechanics and Mathematics Department of Moscow University.

They have already published a number of books on mathematics for schoolchildren and college and university students. Some of the books have been published abroad.


55 коп.
примени математику